

HINWEISE ZU TESTAT 4

Die Vorgehensweise soll am Beispiel der Aufgabe

$$\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

erläutert werden. Durch Umformen erhält man

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und

$$\cos(\pi/4) \sin(\alpha) + \sin(\pi/4) \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sowie, unter Benutzung des Additionstheoremes für den Sinus,

$$\sin(\alpha + \pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Im Intervall $[0, 2\pi)$ sind $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$ die einzigen Stellen, wo der Sinus den Funktionswert $\frac{\sqrt{3}}{2}$ annimmt. Die beiden Möglichkeiten für α sind also $\alpha \in \frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$ und $\alpha \in \frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$. Ist man nur an $\alpha \in [0, 2\pi)$ interessiert, so hat man die beiden Lösungen $\alpha = \frac{\pi}{3}$ und $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Um die Aufgabe ohne Benutzung der arcsin-Funktion eines Taschenrechners oder ähnliche Hilfsmittel lösen zu können, mußten natürlich der speziellen Funktionswerte $\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ erkannt werden. Das Testat setzt dies für $\sin(\gamma)$ mit

$$\gamma \in \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right\} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$$

voraus. Die Funktionswerte dort sind 0 oder ± 1 oder entsprechen bestimmten Längenverhältnissen im gleichseitigen bzw. rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck, die aus der Schule bekannt sein sollten.

Zu beachten ist, daß

$$\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = \sqrt{2}$$

auf $\sin(\alpha + \pi/4) = 1$ führt und auf $[0, 2\pi)$ nur die Lösung $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hat: Die Werte ± 1 werden von \sin auf $[0, 2\pi)$ nur je einmal angenommen.

Mangelnde Berücksichtigung der Aufgabenstellung und mangelnde Sorgfalt, wodurch nicht wirklich alle (bis auf Vielfache von 2π) Stellen gefunden wurden, an denen der Sinus bzw. Kosinus einen bestimmten Wert annimmt, sollten die einzigen Fehlerquellen sein.

Wer noch Schwierigkeiten beim Erkennen der speziellen Funktionswerte der Winkelfunktionen hat, kann auf der Javaskript-Seite zu diesem Testat zunächst den Aufgabentyp auf „einfache Aufgaben“ stellen.