1. Untersuchung auf absolute Konvergenz

Als Beispiel für die Vorgehensweise betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n + n} \tag{1}$$

Zunächst soll der Nenner vereinfacht werden. Für genügend große n gilt $2^n > n$, also

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n + n} \leq \frac{\sqrt{n}}{2^n} \leq \frac{2\sqrt{n}}{2^n}.$$

Die Reihe (1) konvergiert also nach dem Majorantenkonvergenzkriterium genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \tag{2}$$

konvergiert. Für genügend große n gilt $2^{n/2} > \sqrt{n}$, der zu derartigen n gehördende Summand in (2) ist dann $\leq 2^{-n/2}$, und es liegt Majorisierung durch eine konvergente geometrische Reihe vor.

Die Vorgehensweise bestand hier also darin, sich zunächst einen Überblick über das Wachstumsverhalten der einzelnen Terme im Zähler und Nenner zu verschaffen und auf diese Weise eine einfachere Reihe bilden, deren Konvergenz relativ leicht entschieden werden konnte.

Als anderes Beispiel betrachten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n! + 5^n}{n^n + 2^n}. \tag{3}$$

Zunächst überzeugt man sich davon, daß die jeweils zweiten Summanden im Zähler und Nenner asyptotisch viel langsamer wachsen (z. B. gilt $\lim_{n\to\infty} 5^n/(3^n n!) = 0$, denn für genügend große n hat man $n! > 5^n$). Die Konvergenz oder Divergenz der Reihe (3) ist also äquivalent zur analogen Eigenschaft von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}, \tag{4}$$

denn für genügend großes n ist der n-te Summand in (3) kleiner als das Doppelte des n-ten Summanden in (4), und der n-te Summand in (4) kleiner als das Doppelte des n-ten Summanden in (3). Zur Untersuchung der Konvergenzeigenschaften von (4) könnte nun die Stirlingsche Formel benutzt werden, wonach $n!$ wie $(n/e)^n$ wächst. Der n-te Summand in (4) sollte sich also wie $(3/e)^n$ verhalten, was wegen $e = \exp(1) = 2.718281828\ldots$ auf die Divergenz der Reihe hindeutet.

Da wir die Stirlingsche Formel in der Vorlesung nicht behandelt haben, soll eine andere Vorgehensweise skizziert werden. Division des $n+1$-ten Summanden in (4) durch den n-ten ergibt

$$3\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \to \frac{3}{e} > 1$$

für $n \to \infty$, wegen $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n$. Die Folge der (positiven) Summanden in (4) beginnt also ab einem gewissen n monoton zu wachsen, und die Reihe divergiert daher, denn die Folge ihrer Summanden kann nicht gegen 0 konvergieren.

Durch Ersetzen des Faktors 3^n im ersten Summanden des Zählers von (3) durch 2^n erhielte man eine konvergente Reihe, denn für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \tag{5}$$

ist der Quotient aus $(n+1)$-tem und n-tem Summanden

$$2\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \to \frac{2}{e} < 1.$$

Für die im Testat auftretenden Reihen kann die absolute Konvergenz durch die beschriebene Vereinfachung der Summanden, gefolgt von einem der folgenden Prinzipien, entschieden werden:

- Quotientenkriterium: Gilt $|a_{n+1}| \leq q\,|a_n|$ für genügend große n, mit einem von n unabhängigen $q < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut. Gilt hingegen für genügend große n $|a_{n+1}| \geq |a_n| > 0$, so divergiert die Reihe.
- Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} \tag{6}$$

  konvergiert genau für $a > 1$.

Wir der Aufgabentyp in dem über meine Netzseite zugänglichen Java-Skript auf „schwierig“ gestellt, so werden auch Aufgaben erzeugt, für deren Lösung bekannt sein muß, daß die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)^a} \tag{7}$$

genau für $a > 1$ konvergiert. Derartige Aufgaben werden nicht als Testat geschrieben werden.

2. Untersuchung auf bedingte Konvergenz

In den Fällen, in denen in den Testaufgaben konvergente Reihen auftreten, die nicht absolut konvergieren, kann die Konvergenz mit Hilfe des Satzes von Leibniz eingesehen werden. Dieser ist anwendbar auf Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n,$$

wobei für genügend große n die a_n eine monoton fallende Folge bilden und nichtnegativ sind. In diesem Fall konvergiert die Reihe genau dann, wenn die Folge der a_n gegen 0 konvergiert.

Da die Untersuchung der a_n auf Monotonie für die im Testat auftretenden Reihen ohne Berechnung der Ableitung der im Zähler und Nenner auftretenden Funktionen nicht immer ganz einfach wäre, sei hier mitgeteilt, daß für alle im Testat auftretenden Reihen die Folge der $|a_n|$ ab einem Glied monoton fällt, falls sie gegen 0 konvergieren sollte. Man kann sich also beim Testat den Test auf Monotonie sparen, nicht aber im Allgemeinen bei der Anwendung des Leibnizschen Kriteriums. Die korrekte Formulierung dieses Kriteriums könnte sehr wohl Gegenstand von Klausuraufgaben sein!

3. Nachtrag: Beweis der Aussage über (7)

Der Beweis unserer Aussagen über die Konvergenzeigenschaften von (7) sei hier für die Neugierigen nachgetragen, obwohl er für die Bearbeitung der Aufgaben nicht benötigt wird.

Wir betrachten die Summanden $\frac{1}{n\log(n)^a}$ mit $2^k \le n < 2^{k+1}$ mit $k > 1$. Für derartige n gilt $k\log(2) \le \log(n) \le (k+1)\log(2) < 2k\log(2)$, also ist $\frac{1}{n\log(n)^a}$ von oben und unten durch positive Vielfache von $2^{-k}k^{-a}$ beschränkt. Da es genau 2^k derartige n gibt, ist die Konvergenz von (7) äquivalent zur Konvergenz von

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^{-a},$$

was eine Reihe der Form (6) ist. Unsere Aussage über (7) ist also auf die entsprechende, aus der Vorlesung bekannte Behauptung über (6) zurückgeführt.

Die Zurückführungsmethode ist übrigens bekannt als „Verdichtungskriterium" und ist auch eine von mehreren Methoden zum Beweis unserer Aussage über das Konvergenzverhalten von (6). Auch das Integralkriterium könnte benutzt werden, was aber den Rahmen der in der Vorlesung bisher bereitgestellten Techniken sprengen würde.