Die Integranden sind (wenigstens meistens) zusammengesetzt aus Summanden, die in der Vorlesung als Beispiele für partielle Integration behandelt wurden. Partielle Integration ist freilich nicht die einzige und nicht immer die einfachste mögliche Vorgehensweise.

Wie man die Rechnungen genau organisiert ist z. T. eine Frage des persönlichen Geschmacks, weshalb das Programm im Unterschied zu Testat 12 keine Angaben über Zwischenschritte macht.

Typ A

Der Integrand hat die Form

$$(ax^2 + bx + c)\exp(d \cdot x).$$

In der Vorlesung würde erklärt, wie $\int x^n \exp(x)\,dx$ durch partielle Integration und Induktion nach n behandelt werden kann. Die für den Typ relevanten Fälle sind $n \in \{0; 1; 2\}$:

$$\begin{aligned}
\int \exp(x)\,dx &= \exp(x) + C \\
\int x\exp(x)\,dx &= (x-1)\exp(x) + C \\
\int x^2\exp(x)\,dx &= (x^2 - 2x + 2)\exp(x) + C,
\end{aligned}$$

woraus der Fall $d \neq 1$ durck Skalierung gewonnen werden kann: $\int \exp(d \cdot x)\,dx = \frac{1}{d}\exp(d \cdot x) + C$, $\int x\exp(d \cdot x) = \frac{d \cdot x - 1}{d^2}\exp(d \cdot x)$ usw.

Die von mir bevorzugte Vorgehensweise wäre wie bei der induktiven Behandlung von $x^n \exp(x)$ die schrittweise Bestimmung von Funktionen, die deren Ableitungen mit dem Integranden bis auf einen Fehlerterm der Form $P(x)\exp(dx)$ mit einem Polynom P von immer kleinerem Grad übereinstimmen, zum Beispiel:

$$\int \big(15x^2 - 7x + 2\big) \cdot \exp(-3x)dx$$

Sei $f(x) = -5x^2\exp(-3x)$, dann $f'(x) = \big(15x^2 - 10x\big)\exp(-3x)$, also

$$\int \big(15x^2 - 7x + 2\big) \cdot \exp(-3x)dx = f(x) + \int \big(3x + 2\big)\exp(-3x)\,dx$$

Sei $g(x) = -x\exp(-3x)$, dann $g'(x) = \big(3x - 1\big)\exp(-3x)$, also

$$\begin{aligned}
\int \big(15x^2 - 7x + 2\big) \cdot \exp(-3x)dx &= f(x) + g(x) + 3\int \exp(-3x)\,dx + C \\
&= f(x) + g(x) - \exp(-3x) \\
&= -\big(5x^2 + x + 1\big)\exp(-3x) + C
\end{aligned}$$

Typ B

Die Integranden sind aus Summanden der Form $x^n \sin(x)$ und $x^n \cos(x)$ zusammengesetzt, die ähnlich wie $x^n \exp(x)$ behandelt werden können. Um wie in Typ A Monome in x vom Grad ≤ 2 verwenden zu können und trotzdem in Inetgrand und Stammfunktion mit drei Summanden auskommen zu können, erzeugt das Programm entweder gerade ($f(x) = f(-x)$) oder ungerade ($f(x) = -f(-x)$) Funktionen als Integranden. Hierzu ist anzumerken, daß jede Stammfunktion einer ungeraden Funktion gerade ist und jede gerade Funktion eine ungerade (oder gar keine) Stammfunktion hat. Man kann dies neben der Zahl der Summanden in der erhaltenen Lösung sowie der Ganzzahligkeit der Koeffizienten zur Kontrolle der Lösung benutzen.

Beispiel:

$$\int \Big(\big(-10x^2 + 2\big) \cos(2x) - 2x \sin(2x) \Big)\, dx$$

Sei $f(x) = -5x^2 \sin(2x)$, dann $f'(x) = -10x^2 \cos(x) - 10x \sin(x)$, also

$$\begin{aligned} \int \Big(\big(-10x^2 + 2\big) \cos(2x) - 2x \sin(2x) \Big)\, dx &= \\ &= f(x) + \int \big(2\cos(x) + 8x \sin(2x) \big)\, dx. \end{aligned}$$

Sei $g(x) = -4x \cos(2x)$, dann $g'(x) = 8x \sin(2x) - 4\cos(2x)$, also

$$\begin{aligned} \int \Big(\big(-10x^2 + 2\big) \cos(2x) - 2x \sin(2x) \Big)\, dx &= \\ &= f(x) + g(x) + \int 6\cos(2x)\, dx \\ &= f(x) + g(x) + 3\sin(2x) + C \\ &= \big(3 - 5x^2\big) \sin(2x) - 4x\cos(2x) + C. \end{aligned}$$

Offenbar ist der Integrand gerade, während die erhaltene Stammfunktion im Fall $C = 0$ ungerade ist.

Typ C

Die Integranden haben die Form

$$\big(a \log(x)^2 + b \log(x) + c\big) x^\alpha,$$

die induktive Behandlung von $x^\alpha \log(x)^n$ durch partielle Integration wurde in der Vorlesung gebracht. Zu beachten ist dabei allerdings der

Sonderfall $\alpha = -1$:[1]

$$\int \log(x)^k \, \frac{dx}{x} = \frac{\log(x)^{k+1}}{k+1} + C,$$

der nicht auf partieller Integration, sondern auf der Substitution $t = \log(x)$, $dt = \frac{dx}{x}$,

$$\int \log(x)^k \, \frac{dx}{x} = \int t^k \, dt = \frac{t^{k+1}}{k+1} + C = \frac{\log(x)^{k+1}}{k+1} + C$$

beruht. Sieht man von diesem einfachen Sonderfall ab,[2] würde ich ähnlich vorgehen wie in den vorherigen Beispielen:

$$\int \bigl(15\log(x)^2 + 7\log(x) - 10\bigr)x^2 \, dx$$

Sei $f(x) = 5x^3 \log(x)^2$, dann $f'(x) = 15x^2 \log(x)^2 + 10x^2 \log(x)$, also

$$\int \bigl(15\log(x)^2 + 7\log(x) - 10\bigr)x^2 \, dx = f(x) - \int \bigl(3\log(x) + 10\bigr)x^2 \, dx.$$

Sei $g(x) = -\log(x)x^3$, dann $g'(x) = -3\log(x)x^2 - x^2$, also

$$\begin{aligned}\int \bigl(15\log(x)^2 + 7\log(x) - 10\bigr)x^2 \, dx &= f(x) + g(x) - \int 9x^2 \, dx \\ &= f(x) + g(x) - 3x^3 + C \\ &= \bigl(5\log(x)^2 - \log(x) - 3\bigr)x^3 + C.\end{aligned}$$

Typ D

Die Summanden sind von der Form $\exp(a \cdot x)\cos(b \cdot x)$ und $\exp(a \cdot x)\sin(b \cdot x)$, in der Vorlesung wird zweifache partielle Integration bzw. (alternativ) komplexe Substitution im Exponenten beschrieben werden.[3]

Die möglichen Vorgehensweisen wären also:

- Man wendet zweifache partielle Integration auf die einzelnen Summanden an, wie in vielen Lehrbüchern beschrieben.
- Man rechnet komplex.
- Man setzt eine Stammfunktion in der Form $\exp(a \cdot x)\bigl(\xi \sin(b \cdot x) + \upsilon \cos(b \cdot x)\bigr)$ an und löst das entstehende lineare Gleichungssystem für ξ und υ.

---

[1] Daß α ganzzahlig ist, ist zwar in diesen Beispielen der Fall, aber für die Anwendbarkeit der Methode keineswegs notwendig.

[2] Den das Programm in 1/4 aller Fälle vom Typ D erzeugt und in dem sich z. B. die beschriebene Substitution empfiehlt

[3] Der Typ wird in dem ersten Termin 2009 nicht auftreten

Ich möchte an dem Beispiel

$$\int \big(11\exp(2x)\sin(3x) + 10\exp(2x)\cos(3x)\big)\,dx$$

nur die beiden letzteren Versionen vorführen (was im Fall der zweiten Verion ähnlich auch in der Vorlesung geschehen wird):

Bei „komplexer“ Vorgehenseweise nutzt man die Beziehung zwischen exp auf der imaginären Achse und den goniometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned}
&\int \big(11\exp(2x)\sin(3x) + 10\exp(2x)\cos(3x)\big)\,dx \\
&\qquad = \int e^{2x}\big(\frac{11}{2i}(e^{3i\,x} - e^{-3i\,x}) + 5(e^{3i\,x} + e^{-3i\,x})\big)\,dx \\
&\qquad = \int \Big(\frac{10-11i}{2}\exp\big((2+3i)x\big) + \frac{10+11i}{2}\exp\big((2-3i)x\big)\Big)\,dx \\
&\qquad = \frac{10-11i}{2(2+3i)}\exp\big((2+3i)x\big) + \frac{10+11i}{2(2-3i)}\exp\big((2-3i)x\big) + C \\
&\qquad = -\frac{1+4i}{2}\exp\big((2+3i)x\big) - \frac{1-4i}{2}\exp\big((2-3i)x\big) + C \\
&\qquad = \big(4\sin(3x) - \cos(3x)\big)\exp(2x) + C.
\end{aligned}$$

Die komplexe Substitution $z = (2-3i)x$ auf der vierten Zeile ist, wie schon in der Vorlesung mehrfach erwähnt, deswegen möglich, weil $\exp' = \exp$ auch im Sinne der komplexen Differentialrechnung gilt.

Wer lieber ein lineares Gleichungssystem lösen möchte, setzt statt dessen

$$f(x) = \big(\xi\sin(3x) + \upsilon\cos(3x)\big)\exp(2x)$$

für eine Stammfunktion an. Es kommt

$$f'(x) = \big((2\xi - 3\upsilon)\sin(3x) + (2\upsilon + 3\xi)\sin(3x)\big)\exp(2x)$$

also $2\xi - 3\upsilon = 11$, $3\xi + 2\upsilon = 10$ und $13\upsilon = 2\cdot 10 - 3\cdot 11 = -13$, $\upsilon = -1$, $\xi = 4$, also

$$\begin{aligned}
&\int \big(11\exp(2x)\sin(3x) + 10\exp(2x)\cos(3x)\big)\,dx = \\
&\qquad\qquad = \big(4\sin(3x) - \cos(3x)\big)\cdot\exp(2x) + C.
\end{aligned}$$

Glücklicherweise haben wir mit beiden Methoden dasselbe Ergebnis erhalten.