Es geht um die einfachsten nichttrivialen Beispiele einer Partialbruchzerlegung. Integriert werden sollen Integranden der Form

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q} = a + \frac{(b-ap)x+(c-aq)}{x^2+px+q}, \tag{1}$$

also Quotienten zweier quadratischer Polynome. Wie soeben schon vollzogen, zerlegt man den Integranden zunächst einen konstanten Summanden und einen Summanden, der Quotient eines linearen und eines quadratischen Polynomes ist. Dieser Schritt entspricht der Polynomdivision mit Rest, die am Anfang einer allgemeinen Partialbruchzerlegung steht.

Da eine Stammfunktion des ersten Summanden in (1) durch ax gegeben ist, beschränken wir uns von nun an auf Integranden der Form

$$\frac{\alpha x+\beta}{x^2+px+q}$$

Die weitere Vorgehensweise hängt davon ab, ob das Polynom in Nenner zwei verschiedene reelle Nullstellen (Typ A), zwei nichtreelle Nullstellen (Typ B) oder eine reelle Doppelnullstelle (Typ C) hat. Das Testatprogramm erzeugt in der gegenwärtigen Version nur die Typen A und B, was sich auch im weiteren Verlauf des Semesters nicht ändern wird.

Typ A

Des gilt $x^2+px+q = (x-\xi_1)(x-\xi_2)$ mit $\xi_{1,2} = -\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$. Die Partialbruchzerlegung wird in der Form

$$\frac{\alpha x+\beta}{x^2+px+q} = \sum_{i=1}^{2} \frac{A_i}{x-\xi_i} \tag{2}$$

angesetzt. Nach Multiplikation mit $x^2+px+q = (x-\xi_i)(x-\xi_1)$ kommt

$$\alpha x+\beta = A_1(x-\xi_2)+A_2(x-\xi_1). \tag{3}$$

Man kann Koeffezientenvergleich ($\alpha = A_1+A_2$, $\beta = A_1\xi_2+A_2\xi_1$) vornehmen oder (wohl stets einfacher) $x=\xi_i$ setzen, in welchem Fall auf der rechten Seite nur der der A_i enthaltende Summand von 0 verschieden ist, so daß leicht nach A_i aufgelöst werden kann.

Da die Integrale Summanden in (3) bis auf die Verschiebung $x \leftarrow x-\xi_i$ und die Multiplikation mit A_i Grundintegrale sind, kann die Stammfunktin nun leicht berechnet werden.

Als Beispiel betrachten wir

$$\int \frac{-5x^2+4x+89}{x^2-2x-15}\,dx = -5x + \int \frac{14-6x}{x^2-2x-15}\,dx$$

Die Nullstellen des Nenners sind -3 und 5, die Partialbruchzerlegung (2) ist daher als

$$\frac{14-6x}{x^2-2x-15} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}$$

anzusetzen. Es kommt $14-6x = A(x-5) + B(x+3)$ sowie $(x=-3)$ $32 = -8A$, $A = -4$ und $(x=5)$ $-16 = 8B$, $B = -2$, also

$$\frac{14-6x}{x^2-2x-15} = -\frac{4}{x+3} - \frac{2}{x-5}$$

und

$$\int \frac{-5x^2+4x+89}{x^2-2x-15}\,dx = -5x - 4\log|x+3| - 2\log|x-5| + C.$$

Die rechte Seite ist genauer gesagt eine Stammfunktion des Integranden auf jedem Intervall, das keine der Polstellen $x=-3$ und $x=5$ enthält. Das Testatprogramm wählt ein solches Intervall aus und stellt die Berechnung des entsprechenden bestimmten Integrales als Aufgabe. Als Zwischenschritte gibt das Java-Skript auf Wunsch die Partialbruchzerlegung des Integranden sowie die Stammfunktion aus.

Typ B

Im Prinzip kann wie bei Typ A vorgegangen werden, nur daß die ξ nun komplex sind. Für nichtreelle $\xi \in \mathbb{C}$ ist $\log(t-\xi)$ (Hauptzweig des Logarithmus wie in der Vorlesung eingeführt) eine Stammfunktion von $\frac{1}{t-\xi}$ auf ganz $\mathbb{R}$. Allerdings muß bei dieser Vorgehensweise mit komplexen Logarithmen gerechnet werden.

Bequemer dürfte sein, rell zu rechnen:

(4)
$$\frac{\alpha x+\beta}{x^2+px+q} = \frac{\alpha x+\beta}{(x-p/2)^2+d^2} = \frac{B}{(x-p/2)^2+d^2} + \frac{\alpha(x-p/2)}{(x-p/2)^2+d^2}$$

wobei man $B = \beta + \frac{p\alpha}{2}$ durch Koeffizientenvergleich findet. Der erste Summand ist bis auf eine Verschiebung um $p/2$ und eine Skalierung um den Faktor d proportional zu dem Grundintegral $\int \frac{dx}{1+x^2}$, und der zweite steht in einer analogen Beziehung du $\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$. Alternativ dazu (und wohl einfacher) kann im zweiten Summanden gleich $t = (x-p/2)^2 + d^2$ substituiert werden, was auf das Grundintegral $\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$ führt.

Für den ersten Summanden in (4) ist vielleicht sinnvoll, sich als Reskalierung von $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x) + C$

(5)
$$\int \frac{dx}{x^2+d^2} = \frac{1}{d} \cdot \arctan\Big(\frac{x}{d}\Big) + C$$

einzuprägen, diese Gleichung muß dann nur noch um $p/2$ verschoben und mit B multipliziert werden.

Als Beispiel betrachten wir

$$\int \frac{-2x^2 - 2x + 9}{x^2 + 6x + 18}\, dx$$

Es gilt $x^2 + 6x + 18 = (x+3)^2 + 3^2$ und

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2 - 2x + 9}{x^2 + 6x + 18} &= -2 + \frac{10x + 45}{x^2 + 6x + 18} \\ &- 2 + \frac{10(x+3)}{(x+3)^2 + 3^2} + \frac{15}{(x+3)^2 + 3^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Zur Integration des zweiten Summanden auf der rechten Seite substituieren wir $t = (x+3)^2 + 3^2$, $dt = 2(x+3)\, dx$,

$$\int \frac{10(x+3)}{(x+3)^2 + 3^2}\, dx = 5 \int \frac{dt}{t} = 5 \log t + C = 5 \log\big((x+3)^2 + 3^2\big) + C$$

und erhalten unter Benutzung von (5)

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x^2 - 2x + 9}{x^2 + 6x + 18}\, dx &= \\ &= -2x + 5 \log\big((x+3)^2 + 3^2\big) + 5 \arctan\big(\frac{x}{3} + 1\big) + C. \end{aligned} \tag{7}$$

Auch in diesem Fall ist ein bestimmtes Integral zu berechnen und gibt das Java-Skript als Zwischenschritte die Zerlegung (6) und die Stammfunktion (7) aus.

Typ C

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß in diesem Fall

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2$$

sowie

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x + p/2)^2} = \frac{\alpha}{x + p/2} + \frac{\beta - p\alpha/2}{(x + p/2)^2}$$

und

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x + p/2)^2}\, dx = \alpha \log\left|x + \frac{p}{2}\right| + \frac{\frac{p\alpha}{2} - \beta}{x + \frac{p}{2}} + C$$

gilt, und zwar auf jedem Integrationsintervall, das die Polstelle $-\frac{p}{2}$ des Integranden nicht enthält.