In Testat 10 sind verschiedene Typen von Funktionen f mit unterschiedlichem Definitionsbereich auf Monotonie und lokale Extremstellen zu untersuchen. Das Monotonieverhalten kann dem Vorzeichen der Ableitung entnommen werden. An Punkten des Umschlages von monoton wachsendem ($f'(x) > 0$) zu monoton fallendem ($f'(x) < 0$) Verhalten liegen lokale Maxima vor, an Punkten des Vorzeichenwechsels der Ableitung in die entgegengesetzte Richtung lokale Minima. Die von der Testatmaschine produzierten Funktionen sind so beschaffen, daß Nullstellen der Ableitung ohne Vorzeichenwechsel der Ableitung (also Nullstellen von f', die zugleich lokale Extrema von f' sind) horizontale Wendepunkte sind.

Das Java-Skript gibt zusätzlich zu den für eine korrekte Lösung der Testataufgabe erforderlichen Informationen über das Monotonieverhalten und über lokale Extrema auch verschiedene Zwischenschritte der Lösung aus. Dies dient zu Ihrer Hilfestellung und ist nicht Teil der Lösung der Testataufgabe.

Die in den folgenden Überlegungen auftretenden Variablen sollen stets reelle Zahlen bezeichnen.

Typ A

Die Funktionen haben die Form $f(x) = (ax^2 + bx + c)\exp\bigl(dx + e\bigr)$. Es gilt

$$f'(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\exp\bigl(dx + e\bigr). \tag{A1}$$

Das Programm produziert nur Beispiele mit $\alpha \neq 0$.

Da der zweite Faktor in (A1) positiv ist, hängt das Monotonieverhalten vom Vorzeichen des quadratischen Polynomes $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ab. Hat dieses keine reellen Nullstellen, so stimmt das Vorzeichen von (A1) stets mit dem Vorzeichen von α überein. Andernfalls ist dies nur außerhalb des Intervalles zwischen den beiden Nullstellen der Fall, während zischen den beiden Lösungen von $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ das Vorzeichen von (A1) verschieden vom Vorzeichen von α ist.

Typ B

Die Funktionen haben die Form $f(x) = (ax + b)\exp\bigl(cx^2 + dx + e\bigr)$. Es gilt

$$f'(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\exp\bigl(cx^2 + dx + e\bigr). \tag{B1}$$

Wiederum ist der zweite Faktor positiv, und das Programm produziert nur Beispiele mit $\alpha \neq 0$. Die Diskussion des Vorzeichens von (B1) gleicht also der Diskussion des Vorzeichens von (A1).

Typ C

Die Funktionen haben die Form $ax + b\log(1 + x^2) + c\arctan x$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{1 + x^2}. \tag{C1}$$

Der Nenner ist positiv, und das Programm produziert nur Beispiele mit $\alpha \neq 0$. Die Diskussion des Vorzeichens von (C1) gleicht also der Diskussion des Vorzeichens von (A1).

Typ D

Die Funktionen haben die Form $(ax+b)\sqrt{1 - x^2} + c\arcsin x$ und sind nur auf $[-1, 1]$ definiert. Auf $(-1, 1)$ gilt

$$f'(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{D1}$$

Der Nenner ist positiv, und die Diskussion des Vorzeichens gleicht daher der Diskussion des Vorzeichens von (A1). Zu beachten ist aber, daß nicht alle Nullstellen von $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ im Definitionsbereich von f liegen müssen. Lösungen von $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ mit $|x| > 1$ entsprechen daher weder lokalen Extrema noch horizontalen Wendepunkten von f.

Typ E

Die Funktionen haben die Form $ax + \frac{b}{\cos x} + c\tan x$ und sind auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definiert. Es gilt

$$f'(x) = a + \frac{b\sin(x)}{\cos(x)^2} + \frac{c}{\cos(x)^2} = \frac{-a\sin(x)^2 + b\sin(x) + (c + a)}{\cos(x)^2} \tag{E1}$$

daselbst, also

$$f'(x) = \frac{\alpha\sin(x)^2 + \beta\sin(x) + \gamma}{\cos(x)^2}. \tag{E2}$$

Der Nenner ist positiv, also hat $f'(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $\alpha\sin(x)^2 + \beta\sin(x) + \gamma$. Zu untersuchen sind also wieder die Vorzeichenwechsel eines quadratischen Polynomes $\alpha s^2 + \beta s + \gamma$, wobei auf die entsprechenden s erst der Arkussinus angewendet werden muß, um die Punkte des Vorzeichenwechsels von f' zu bekommen. Wiederum entsprechen Lösungen s von $\alpha s^2 + \beta s + \gamma = 0$ mit $|s| \geq 1$ keinen Nullstellen von f'.

Die für die Lösung dieses Aufgabentypes benötigten speziellen Werte des Arkussinus entsprechen den für Testat 4 benötigten und können der folgenden Tabelle entnommen werden:

ϕ	0	30^o	45^o	60^o	90^o
ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Typ F

Die Funktionen haben die Form $f(x) = ax + b\sin(2x) + c\cos(x)$ und sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Es gilt $f(x + 2\pi) = f(x) + 2a\pi$, das Monotonieverhalten und die Ableitung sind daher (im Unterschied zu f selbst) stets periodisch mit der Periode 2π. Es gilt

(F1) $f'(x) = a+2b\cos(2x)-c\sin(x) = -4b\sin(x)^2-c\sin(x)+(a+2b)$,

also

$$f'(x) = \alpha\sin(x)^2 + \beta\sin(x) + \gamma. \tag{F2}$$

Es ist also ähnlich wie für Typ E die Diskussion des Vorzeichens eines quadratischen Polynomes in $\sin(x)$ erforderlich. Zu beachten ist der größere Definitionsbereich und die Periodizität von f'.

Typ G

Die Funktionen haben die Form $f(x) = ax + b\sin(x) + c\cos(x)$ und sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Ähnlich wie bei Typ E ist das Monotonieverhalten periodisch mit der Periode 2π. Zur Lösung der Aufgabe geht man ähnlich wie in Testat 4 vor und formt unter Benutzung des Addtionstheoremes

$$f(x) = ax + \lambda\cos(x + \vartheta) \tag{G1}$$

mit

$$f'(x) = a - \lambda\sin(x + \vartheta) \tag{G2}$$

um. Die Vorgehensweise zur Ermittlung der Nullstellen gleicht also Testat 4, wobei im Unterschied zu Testat 4 auch das Vorzeichen der Ableitung zwischen den Nullstellen eine Rolle spielt, wozu man sich den Graphen des Sinus veranschaulichen muß.

Alternativ zu (G1) und (G2) kann auch erst differenziert und dann das Additionstheorem angewendet werden.

Lösung der quadratischen Gleichung

Die Lösungsformel $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ für

$$x^2 + px + q = 0 \tag{Q1}$$

sollte aus der Schule bekannt sein. Die meisten auftretenden quadratischen Gleichungen haben, nach Vielfachheit gezählt, zwei rationale Nullstellen. Seltener produziert das Programm für die Typen A–D auch quadratische Gleichungen ohne reelle Nullstellen. Bei den Typen E und F können auch zu

$$2x^2 - 1 \qquad \text{oder} \qquad 4x^2 - 3 \tag{Q2}$$

proportionale quadratische Polynome als vorzeichenbestimmende Faktoren der Ableitung entstehen, deren Nullstellen durch die speziellen Funktionswerte $\sin(\pm\frac{\pi}{4})$ und $\sin(\pm\frac{\pi}{3})$ des Sinus gegeben sind. Von diesen Fällen abgesehen, können Sie davon ausgehen, sich verrechnet zu haben, wenn die entstehenden quadratischen Gleichungen keine rationalen Lösungen haben. Liegen keine rellen Lösungen vor, wäre das Ergebnis sicherheitshalber nochmal nachzurechnen. Allerdings wird dieser Fall bisweilen erzeugt. Sind die reellen Lösungen nicht rational, liegt entweder Typ E oder F und ein zu einem der Polynome in (Q2) proportionales Polynom vor, oder Sie haben sich verrechnet.

Zum Test der Lösung kann der Vietasche Wurzelsatz

$$\begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2) \\ q &= x_1 x_2 \end{aligned} \tag{Q3}$$

für die Lösungen von (Q1) benutzt werden. Dieser kann auch zum Erraten rationaler Lösungen benutzt werden, zusammen mit dem folgenden Fakt: Wenn $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, eine quadratische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten a, b, c ist und $x = \frac{z}{n}$ ein teilerfremder Bruch $(z, n \in \mathbb{Z})$ ist, der die Gleichung löst, so ist z ein Teiler von c und n ein Teiler von a. Insbesondere sind im Fall $a = 1$ alle rationalen Nullstellen ganzzahlig und Teiler von c.