ÜBUNGSZETTEL 7 - LINEARE ALGEBRA II

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** *Für einen Endomorphismus f eines Skalarproduktraumes zeige man die Äquivalenz der beiden folgenden Bedingungen:*

i) *f ist der Orthogonalprojektor auf sein Bild.*
ii) *f ist normal, und es gilt $f^2 = f$.*

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** *Man zeige, daß ein Skalarprodukt über $\mathbb{K}$ durch seine assoziierte Norm eindeutig bestimmt ist.*

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** *Für einen Endomorphismus f eines endlich dimensionalen Skalarproduktraumes V zeige man die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:*

i) $ff^* = \mathrm{id}_V$.
ii) $f^*f = \mathrm{id}_V$.
iii) *Es gilt $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in V$.*
iv) *Es gilt $||f(x)|| = ||x||$ für alle $x \in V$.*
v) *f ist normal, und alle Eigenwerte von f ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. alle Eigenwerte von f auf der Komplexifizierung von V ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) sind komplexe Zahlen vom Betrag 1.*

Definition. *Derartige Automorphismen nennt man* unitär *für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder* orthogonal *für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*

Definition. *Für eine komplexe $n \times n$-Matrix M setzen wir:*

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M^i}{i!}$$

Um dieser Definition Sinn zu geben, muss man zeigen, dass die angegebene Reihe auch wirklich konvergiert, und um der Konvergenz Inhalt zu geben kann man etwa eine Norm auf $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ einführen. Es stellt sich dann im Nachhinein heraus, dass der Konvergenzbegriff unabhängig von der Wahl der Norm ist und obige Reihe immer absolut konvergiert. Analoges gilt für Endomorphismen eines endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums, im unendlichen jedoch ist die Konvergenz *nicht* unabhängig von der Wahl einer Norm und das sogar auf relativ subtile

Weise! Da diese Sätze wohl eher der Analysis zuzuordnen sind, setzen wir sie hier der Einfachheit halber voraus.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** *Zeigen Sie:*

i) *Für jede invertierbare* $n \times n$*-Matrix* S *gilt* $\exp(SAS^{-1}) = S\exp(A)S^{-1}$.
ii) *Falls* $AB = BA$*, so gilt* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
iii) *Es gilt* $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.
iv) *Es gilt* $\exp(A^*) = \exp(A)^*$.
v) *Es gilt* $\exp(0) = \mathrm{id}_V$.
vi) *Wenn* A *selbstadjungiert (bzw. normal) ist, so ist auch* $\exp(A)$ *selbstadjungiert (bzw. normal).*
vii) *Wenn* A *antiselbstadjungiert (*$A^* = -A$*) ist, so ist* $\exp(A)$ *unitär.*
viii) *Im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *kann jeder selbstadjungierte Endomorphismus mit positiven Eigenwerten als Exponential eines selbstadjungierten, jeder invertierbare, normale als Exponential eines normalen und jeder unitäre als Exponential eines antiselbstadjungierten Endomorphismus dargestellt werden.*