ÜBUNGSZETTEL 4 - LINEARE ALGEBRA II

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** *Finden sie jeweils die größte Zahl n, sodass die Jordan-Normalform aller $n \times n$-Matrizen durch ihre Eigenwerte, deren algebraische Vielfachheiten und*

i) *deren geometrischen Vielfachheiten*
ii) *deren Indizes*
iii) *sowohl deren geometrische Vielfachheiten und deren Indizes*

eindeutig bestimmt ist. Als Index *eines Eigenwerts λ von $f : V \to V$ bezeichnen wir hier die kleinste Zahl k mit*

$$\big((\lambda I - f)_{|V^{\sim}_{\lambda}(f)}\big)^k = 0.$$

Achtung: Für diese Zahl gibt es (soweit ich weiß) keine Standardbezeichnung.

Aufgabe 2 (7 Punkte)**.** *Bestimmen Sie die Jordan-Normalformen folgender Matrizen über $\mathbb{C}$*

$$\begin{pmatrix} -45 & 60 & 72 \\ -8 & 13 & 12 \\ -24 & 30 & 39 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & 11 & -59 \\ 0 & 5 & 10 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -52 & 69 & 83 \\ -22 & 31 & 34 \\ -17 & 21 & 28 \end{pmatrix}$$

und von mindestens einer auch eine Jordan-Basis.

In der folgenden Aufgabe beginnen wir mit der Herleitung der *reellen* Normalform, die die Jordan'sche als Konsequenz nach sich zieht. Dafür zunächst noch ein allgemeiner Fakt über die Komplexifzierung.

Definition. *Ist V ein reeller Vektorraum, so heißt ein komplexer Unterraum W von $V_{\mathbb{C}}$* induziert *genau dann, wenn es einen reellen Unterraum von $X \subseteq V$ gibt, mit $W = X_{\mathbb{C}} \subseteq V_{\mathbb{C}}$.*

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** *Zeigen Sie:*

i) *Ein Unterraum W ist genau dann induziert, wenn $\overline{W} = W$.*
ii) *Ein Unterraum X wie oben ist durch $\iota(X) = \ker\big((\overline{} - id)_{|W}\big)$ eindeutig bestimmt.*

Abgabetermin: 13.05. in der Vorlesung

Aufgabe 4 (7 Punkte)**.** *Sei f ein Endomorphismus eines rellen Vektorraums V. Zeigen Sie:*

i) *Mit $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$.*

ii) *Die Unterräume*

$$(V_{\mathbb{C}})_{\lambda}(f) + (V_{\mathbb{C}})_{\overline{\lambda}}(f)$$

und

$$(V_{\mathbb{C}})^{\sim}_{\lambda}(f) + (V_{\mathbb{C}})^{\sim}_{\overline{\lambda}}(f)$$

von $V_{\mathbb{C}}$ sind beide induziert.

Für $\lambda \notin \mathbb{R}$ bezeichnen wir die zugehörigen Unterräume von V mit $V_{\lambda,\overline{\lambda}}(f)$ bzw. $V^{\sim}_{\lambda,\overline{\lambda}}(f)$.

iii) *Für $\lambda \notin \mathbb{R}$ gilt*

$$V_{\lambda,\overline{\lambda}}(f) = \ker(f^2 - (\lambda + \overline{\lambda})f + \lambda\overline{\lambda}).$$

iv) *Ist V endlich dimensional, so ist für $\lambda \notin \mathbb{R}$ der Unterraum $V^{\sim}_{\lambda,\overline{\lambda}}(f)$ von V der größte, auf dem*

$$f^2 - (\lambda + \overline{\lambda})f + \lambda\overline{\lambda}$$

nilpotent ist.

Da $\lambda + \overline{\lambda}, \lambda\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ spielen die Polynome $T^2 - (\lambda + \overline{\lambda})T + \lambda\overline{\lambda} \in \mathbb{R}[T]$ für echt komplexe λ also die Rolle der Polynome $T - \lambda$ für reelle λ.