ÜBUNGSZETTEL 11 - LINEARE ALGEBRA II

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Sei V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform β vom Typ $(2, 1)$.

Definition. *Wir nennen Elemente v von $V \setminus \{0\}$ raumartig (bzw. zeitartig oder lichtartig), wenn $\beta(v, v)$ positiv (bzw. negativ oder 0) ist.*

Für den $\mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten (t, x, y) entspricht dies den üblichen Konventionen der speziellen Relativitätstheorie, wenn die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 gesetzt wird. Die Gleichung $x^2 + y^2 = t^2$ (die offenbar $\beta(v, v) = 0$ entspricht) charakterisiert gerade die Vereinigungsmenge aus Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel. Im Fall $x^2 + y^2 > t^2$ wäre Überlichtgeschwindigkeit erforderlich, im in der Zeit t von $(0, 0)$ zu (x, y) zu gelangen, weswegen man derartige Abstände als raumartig betrachtet.

Daß die Menge aller lichtartigen Vektoren in der Tat in einen Vorwärts- und einen Rückwärtslichtkegel zerfällt, kann man mit der folgenden Ungleichung einsehen.

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** *Wenn $u \in V$ zeit- oder lichtartig und $v \in V$ ebenfalls zeit- oder lichtartig ist, so gilt*

$$\beta(u, v)^2 \geq \beta(u, u)\beta(v, v)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn u und v zueinander proportional sind.

Für die folgenden Aufgaben ist es bestimmt wieder nützlich sich die Situation in Spezialdfall der Standard-$(2, 1)$-Form auf dem $\mathbb{R}^3$ zu veranschaulichen, indem man den Licktkegel tatsächlich skizziert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Zeigen Sie:*

i) *Die Menge der lichtartigen Vektoren von V hat zwei Zusammenhangskomponenten.*
ii) *Die Menge*

$$\mathfrak{H}_\pm = \left\{ v \in V \middle| \beta(v, v) = -1 \right\}$$

Abgabetermin: 12.07. in der Vorlesung

hat ebenfalls zwei Zusammenhangskomponenten, und wenn $\mathfrak{H}$ eine dieser Zusammenhangskomponenten bezeichnet, so gilt

$$\beta(x, y) \le -1$$

für $x, y \in \mathfrak{H}$ mit Gleichheit genau für $x = y$.

Im folgenden sei immer $\mathfrak{H}$ eine derartige Zusammenhangskomponente.

Definition. *Wir setzen $d_{\mathfrak{H}}(x, y) = \operatorname{arcosh}\big(-\beta(x, y)\big)$ für $x, y \in \mathfrak{H}$.*

Wir werden gleich sehen, daß $(\mathfrak{H}, d_{\mathfrak{H}})$ ein metrischer Raum ist. Es handelt sich um eine hyperbolische Ebene, also (bei geeigneter Einführung geometrischer Begriffe wie Strecke und Winkel) um ein Modell einer Geometrie, in welchem die Axiome einer Euklidischen Geometrie mit Ausnahme des Parallelenaxiomes gelten.
Weiterhin, entspricht jedem Punkt $v \in \mathfrak{H}$ ein Intertialsystem im Sinne der speziellen Relativitätstheorie. Die raum-zeitlichen Trajektorien von Massepunkten, welche sich in diesem System in Ruhe befinden, sind gerade die Kurven

$$C_x = \{x + \tau v \big| \tau \in \mathbb{R}\}$$

mit $x \in V$. Die Intertialsysteme der dreidimensionalen Raum-Zeit V bilden also eine hyperbolische Ebene, so wie die Inertialsysteme der Newtonschen Mechanik im Fall eines zweidimensionalen Raumes eine Euklidische Ebene bilden.

Definition. *Eine* Gerade in $\mathfrak{H}$ ist eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{H}$, die als $\mathfrak{g} = \mathfrak{H} \cap X$ dargestellt werden kann, wobei X ein zweidimensionaler Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** *Zeigen Sie:*

i) *Wenn X ein zweidimensionaler Untervekttorraum von V ist, so ist $\mathfrak{H} \cap X$ genau dann nicht leer, wenn $\beta|_{X \times X}$ nichtausgeartet vom Typ $(1, 1)$ ist.*
ii) *Wenn $x \ne y$ zwei verschiedene Elemente von $\mathfrak{H}$ sind, so gibt es genau eine Gerade in $\mathfrak{H}$, welche sowohl x als auch y enthält.*

Definition. *Für $x \in \mathfrak{H}$ setzen wir*

$$T_x = T_x\mathfrak{H} := \{v \in V \big| \beta(x, v) = 0\}.$$

Sei $g(x) = \beta(x, x) + 1$, dann gilt für die Funktion $g_{x,v}(\lambda) = g(x + \lambda v)$

$$g'_{x,v}(\lambda) = 2\beta(v, x) + 2\lambda\beta(v, v)$$

und T_x ist die Menge aller Vektoren v, für welche diese Ableitung bei $\lambda = 0$ verschwindet. T_x kann also (etwa nach dem Satz über implizite

Funktionen) geometrisch als die Tangentialebene an $\mathfrak{H}$ im Punkte x interpretiert werden.

Aufgabe 4 (2 Punkte). *Mit $\beta|_{T_x \times T_x}$ wird T_x zu einem zweidimensionalen Euklidischen Vektorraum.*

Wir betrachten nun drei Elemente A, B und C von $\mathfrak{H}$, die nicht in einer Geraden enthalten sind. Sei $a = d_{\mathfrak{H}}(B, C)$, $b = d_{\mathfrak{H}}(A, C)$ und $c = d_{\mathfrak{H}}(A, B)$.

Aufgabe 5 (2 Punkte). *Es gibt genau einen Vektor $\mathfrak{t}_{A,B} \in T_A$ der Norm 1, der die Form*

$$\mathfrak{t}_{A,B} = \lambda A + \vartheta B$$

mit einer positiven reellen Zahl ϑ hat. Es gilt

$$\mathfrak{t}_{A,B} = \frac{B - \cosh(c) \cdot A}{\sinh c}.$$

Sei $\alpha \in (0, \pi)$ der unorientierte Winkel zwischen $\mathfrak{t}_{A,B}$ und $\mathfrak{t}_{B,C}$ in T_A, und seien β und γ analog definiert.

Aufgabe 6 (7 Punkte). *Zeigen Sie:*

i) *Es gilt der hyperbolische Sinussatz*

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}.$$

ii) *Es gilt der Seitenkosinussatz*

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha).$$

iii) $(\mathfrak{H}, d_{\mathfrak{H}})$ *ist ein metrischer Raum.*

iv) *Es gilt der Winkelkosinussatz*

$$\cosh(\alpha) = \sin(\beta) \sin(\gamma) \cosh(a) - \cos(\beta) \cos(\gamma).$$