ÜBUNGSZETTEL 9 - LINEARE ALGEBRA I

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Bei der Lösung sollen nur solche Sätze aus der linearen Algebra benutzt werden, die bis einschließlich Freitag, 18.12. (Ausgabetag des Zettels) in der Vorlesung oder auf einem vorherigen Übungszettel vorgestellt wurden. Allerdings ist nicht erforderlich, dass der Beweis in der Vorlesung bereits vollständig erfolgt ist. Es befinden sich wieder einmal 5 Punkte mehr auf dem Zettel als üblich, die sind wie zuvor Bonus.

Aufgabe 1 (12 Punkte)**.** *Sei $f : V \longrightarrow V$ eine Selbstabbildung eines endlichdimensionalen K-Vektorraums. Zeigen Sie:*

i) *Ist K algebraisch abgeschlossen, so existiert eine Basis B von V derart, dass $Mat_{B,B}(f)$ obere Dreicksgestalt hat.*
ii) *Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix genau die Diagonaleinträge sind.*
iii) *Folgern Sie die Umkehrung von Aufgabe 2, Zettel 8 für algebraisch abgeschlossenes K: Ist 0 der einzige Eigenwert von f so gilt*

$$f^{dim(V)} = 0$$

Hinweise*: Versuchen sie bei* i) *etwa Induktion indem sie einen Eigenvektor zu einer Basis ergänzen (wie sieht dann die zugehörige Matrix aus?) und die Induktionsvoraussetzung geeignet auf den von den übrigen Basiselementen aufgespannten Unterraum anwenden.*
Bei ii) *hilft es vielleicht sich zunächst klar zu machen, dass eine Dreiecksmatrix genau dann invertierbar ist, wenn kein Diagonaleintrag* 0 *ist (Zeilenstufenform!).*

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** *Es sei B (bzw. C) eine Basis des K-Vektorraums V (bzw. W), und die Abbildung $f : V \longrightarrow W$ sei linear. Man zeige*

i)

$$Mat_{C^*,B^*}(f^*) = Mat_{B,C}(f)^T$$

für die Matrixdarstellung der dualen linearen Abbildung f^* bezüglich der dualen Basen.

Abgabetermin: 15.01. vor der Vorlesung

ii) *Ist $V = W$ so stimmen die Eigenwerte von f mit denen von f^* überein.*

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen und $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ die duale Abbildung. Man zeige:*

$$Ker(f^*) = Im(f)^{\perp}$$
$$Im(f^*) = Ker(f)^{\perp}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** *Man bestimme die inverse Matrix zu*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 5 \\ 2 & 9 & 10 \end{pmatrix} \in Mat(3, 3; \mathbb{Q}).$$

Help-Desk für lineare Algebra I: Montag 16-19 Uhr, Donnerstag 10-13 Uhr, Chiara Mazziotta (s6chmazz@uni-bonn.de), Raum N1.002