ÜBUNGSZETTEL 8 - LINEARE ALGEBRA I

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Bei der Lösung sollen nur solche Sätze aus der linearen Algebra benutzt werden, die bis einschließlich Freitag, 11.12. (Ausgabetag des Zettels) in der Vorlesung oder auf einem vorherigen Übungszettel vorgestellt wurden. Allerdings ist nicht erforderlich, dass der Beweis in der Vorlesung bereits vollständig erfolgt ist.

Sei immer K ein Körper.

Aufgabe 1 (8 Punkte). *Wir setzen $K = \mathbb{Q}$ voraus und betrachten*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

sowie

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 13 & 17 & 19 \end{pmatrix}.$$

Die Einschränkungen $N \cdot - : \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$ auf $Ker(M)$ (bzw. $Im(M)$) bezeichnen wir mit ν_1 (bzw. ν_2) und die Standardbasis des $\mathbb{Q}^2$ mit B_2. Man gebe eine Basis C von $Ker(M)$ nebst $Mat_{C,B_2}(\nu_1)$ und auch eine Basis D von $Im(M)$ nebst $Mat_{D,B_2}(\nu_2)$ an!

Aufgabe 2 (4 Punkte). *Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ linear mit $f^n = 0$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie,*

$$f^{dim(V)} = 0$$

Zeigen Sie auch, dass in diesem Fall 0 der einzige Eigenwert von f ist.

Abgabetermin: 08.01. vor der Vorlesung

Definition. *Sei $p = (p_i)_{i=0}^{n-1}$ ein n-Tupel von Elementen von K. Mit $F^{(p)}$ bezeichnen wir die $n \times n$-Matrix*

$$F^{(p)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & p_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & p_{n-1} \end{pmatrix},$$

also

$$f_{i,j}^{(p)} = \begin{cases} \delta_{i-1,j} & 1 \leq j < n \\ p_{i-1} & j = n. \end{cases}$$

Man nennt diese Matrix Frobeniusmatrix *oder* Begleitmatrix *zum Polynom*

$$T^n - \sum_{j=0}^{n-1} p_j T^j.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** *Man zeige:*

i) *$\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert von $F^{(p)}$, wenn λ die algebraische Gleichung n-ten Grades*

$$\lambda^n = \sum_{k=0}^{n-1} p_k \lambda^k$$

löst.

ii) *Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen K-Vektorraumes V und $v \in V \setminus \{0\}$. Dann existieren ein Unterraum $U \subseteq V$ mit $f(U) \subseteq U$ und eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von U mit $b_1 = v$, so dass $Mat_{B,B}(f_{|U}) = F^{(p)}$ für ein $p = (p_0, \dots, p_{n-1}) \in K^n$ gilt.*

iii) *Genau dann hat jeder Endomorphismus f eines K-Vektorraumes $V \neq 0$ der Dimension n einen Eigenwert $\lambda \in K$, wenn jede algebraische Gleichung vom positiven Grade $\leq n$ mit Koeffizienten aus K eine Lösung in K hat.*

Inbsesondere ist K genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn jeder Endomorphismus eines von 0 verschiedenen endlichdimensionalen K-Vektorraumes einen Eigenwert $\lambda \in K$ hat.

Help-Desk für lineare Algebra I: Montag 16-19 Uhr, Donnerstag 10-13 Uhr, Chiara Mazziotta (s6chmazz@uni-bonn.de), Raum N1.002