ÜBUNGSZETTEL 7 - LINEARE ALGEBRA I

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Bei der Lösung sollen nur solche Sätze aus der linearen Algebra benutzt werden, die bis einschließlich Freitag, 04.12. (Ausgabetag des Zettels) in der Vorlesung oder auf einem vorherigen Übungszettel vorgestellt wurden. Allerdings ist nicht erforderlich, dass der Beweis in der Vorlesung bereits vollständig erfolgt ist (aber er darf dort natürlich auch nicht in die Übungen deligiert worden sein).

Wir erinnern an die Definition eines Unterkörpers: Eine Teilmenge L eines Körpers K ist ein Unterkörper, wenn zum einen $\mathbb{0}, \mathbb{1} \in L$ gilt und L zum andern unter Addition, Multiplikation und dem Bilden von Negativen und multiplikativen Inversen (für Elemente $\neq \mathbb{0}$) abgeschlossen ist. L bildet sodann mit den eingeschränkten Verknüpfungen selber einen Körper und die Inklusionsabbildung $L \longrightarrow K$ ist ein Körperhomomorphismus.

Sei von hier an L ein Unterkörper eines Körpers K und V sowie W Vektorräume über K. Wir erinnern daran, dass man dann V (und natürlich W ebenso) durch Einschränken der Skalarmultiplikation auch als L-Vektorraum auffassen kann.

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** *Gegeben sei eine Menge M von Unterkörpern von K und eine Menge N von Untervektorräumen von V. Zeigen Sie:*

i) *Der Durchschnitt von M*
$$\bigcap_{X \in M} X$$
ist ebenfalls ein Unterkörper von K. Ebenso ist der Durchschnitt von N ein Untervektorraum.

ii) *Wie steht es mit der analogen Aussage für Vereinigungen? Geben Sie einen Beweis ihrer Aussage oder zumindest für den Fall von Vektorräumen ein Gegenbeispiel.*

Für einen Körper K definiert man den Primkörper $P(K)$ von K als den Durchschnitt aller Unterkörper von K. Warum ist eine analoge Definition für Vektorräume eher witzlos?

Abgabetermin: 18.12. vor der Vorlesung

iii) *Gilt $char(K) = p > 0$, so gibt genau einen Körperisomorphismus $\mathbb{Z}/p \longrightarrow P(K)$.*

iv) *Folgern Sie: Ist K endlich, so gibt es eindeutige natürliche Zahlen p und n, derart dass p ein Primzahl ist und $\#K = p^n$.*

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** *Es sei $V \neq 0$. Man zeige:*

$$dim_L(V) = dim_L(K) \cdot dim_K(V)$$

Zum Beispiel ist die reelle Dimension eine komplexen Vektorraums das doppelte seiner komplexen Dimension. Zeigen Sie hierbei insbesondere auch, dass V genau dann eine endliche Basis als L-Vektorraum besitzt, wenn dies für sowohl K als L-Vektorraum als auch V als K-Vektorraum gilt.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** *Man zeige: Die inverse Abbildung zu einer bijektiven linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ ist linear.*

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** *Für lineare Abbildungen $f : V \longrightarrow W$ zeige man die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften:*

i) *Für jede Erzeugendenmenge S von V ist $f(S)$ eine Erzeugendenmenge von W.*

ii) *Es gibt eine Teilmenge $S \subseteq V$, so daß $f(S)$ Erzeugendenmenge von W ist.*

iii) *f ist surjektiv.*

Man zeige weiter, daß in diesem Fall $\dim W \leq \dim V$ gilt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** *Für eine Matrix $A \in Mat(m, n; K)$ zeige man:*

i) *$A \cdot - : K^n \to K^m$ ist genau dann surjektiv, wenn die Zeilen von A linear unabhängig sind.*

ii) *$A \cdot - : K^n \to K^m$ ist genau dann injektiv, wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.*

Help-Desk für lineare Algebra I: Montag 16-19 Uhr, Freitag 13-16 Uhr, Chiara Mazziotta (s6chmazz@uni-bonn.de), Raum N1.002