ÜBUNGSZETTEL 6 - LINEARE ALGEBRA I

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Bei der Lösung sollen nur solche Sätze aus der linearen Algebra benutzt werden, die bis einschließlich Freitag, 27.11. (Ausgabetag des Zettels) in der Vorlesung vorgestellt wurden oder auf vorigen Übungszetteln zu beweisen waren. Allerdings ist nicht erforderlich, dass der Beweis in der Vorlesung bereits vollständig erfolgt ist. Bei der Lösung von Aufgabe 2 sollen die Resultate der Abschnitte 1.1 bis 1.4 aus der Vorlesung sowie die davon abhängigen Sätze der Vorlesung (insbesondere also Satz 2.4.2) *nicht* benutzt werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte). *Gegeben sei eine abelsche Gruppe A. Zeigen Sie:*

i) *A besitzt genau dann eine die (gegebene Verknüpfung auf A erweiternde) $\mathbb{Q}$-Vektorraumstruktur, wenn A jedes Element von A eindeutig teilbar ist, das heißt für jedes $a \in A$ und jede natürliche Zahl $n > 0$ gibt es genau ein $b \in A$ mit $n\dot{b} = a$.*
ii) *Im Falle der Existenz ist die $\mathbb{Q}$-Vektorraumstruktur eindeutig bestimmt.*

Aufgabe 2 (8 Punkte). *Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K.*

i) *Sei $T \subseteq V$ ein Erzeugendensystem und*
$$s = \sum_{t \in T} \lambda_t t$$
wobei $\lambda_t \in K$, fast alle 0. Zeigen Sie: Für jedes $t \in T$ mit $\lambda_t \neq 0$ ist auch $\{s\} \cup (T \setminus \{t\})$ ein Erzeugendensystem.
ii) *Sei $S \subseteq V$ endlich und linear unabhängig und sei T ein endliches Erzeugendensystem von V. Dann existiert eine Teilmenge $X \subseteq T$ mit $\#X = \#S$, so dass $S \cup (T \setminus X)$ ein Erzeugendensystem von V ist.*
Hinweis: vollständige Induktion nach $\#S$.
iii) *Folgern Sie: Ist V endlich erzeugt, so haben je zwei Basen von V die gleiche Anzahl an Elementen.*

Abgabetermin: 11.12. vor der Vorlesung

Teil ii) bezeichnet man als *Steinitz'schen Austauschsatz.* Er wird häufig an Stelle der von uns in der Vorlesung benutzten Resultate über Gleichungssysteme benutzt, um den Dimensionsbegriff einzuführen. Er hat vielseitig anwendbare Modifikationen (z.B. den sogenannten Transzendenzgrad von Körpererweiterungen) und ist Ausgangspunkt für die wichtige kombinatorische Theorie der *Matroide*.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Es sei wieder K ein Körper und V ein Vektorraum über K und $B \subseteq V$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:*

i) *B ist eine Basis von V.*
ii) *B ist eine maximale linear unabhngige Teilmenge von V.*
iii) *B ist minimales Erzeugendensystemen von V.*

Hinweis: Einige der Implikationen haben Sie schon in der Vorlesung bewiesen, hier reicht natürlich jeweils ein Verweis.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** *Prüfen Sie die folgenden Gleichungssysteme auf Lösbarkeit und bestimmen sie ggf. die Lösungen fr jeden der Körper $\mathbb{Z}/p$, p prim, und $\mathbb{Q}$.*

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x & +7y & +14z & +31w & = & 12 \\ x & -12y & +12z & & = & 0 \\ 14x & & +3z & -w & = & 1 \\ 25x & +36y & -30z & -2w & = & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +4y & +6z & = & 3 \\ 3x & +2y & & = & 6 \\ 3x & & -6z & = & 9 \\ 3x & -2y & -12z & = & 12 \end{array}$$

Hierbei sind die auftauchenden Zahlen n für $n \geq p$ natürlich als $n\%p$ zu lesen. Beispielsweise lautet die erste Zeile des oberen Systems über $\mathbb{Z}/5$ etwa

$$3x + 2y + 4z + w = 2$$

.

Hinweis: Das zweite System ist uns im Falle der rationalen Zahlen schon auf Zettel 3 begegnet.

Help-Desk für lineare Algebra I: Montag 16-19 Uhr, Freitag 13-16 Uhr, Chiara Mazziotta (s6chmazz@uni-bonn.de), Raum N1.002