ÜBUNGSZETTEL 5 - LINEARE ALGEBRA I

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Bei der Lösung sollen nur solche Sätze aus der linearen Algebra benutzt werden, die bis einschließlich Freitag, 20.11. (Ausgabetag des Zettels) in der Vorlesung vorgestellt wurden oder auf vorigen Übungszetteln zu beweisen waren. Allerdings ist nicht erforderlich, dass der Beweis in der Vorlesung bereits vollständig erfolgt ist.

Dieser Zettel dreht sich um die Konstruktion einiger wichtiger Beispiele für Körper. Wir erweitern zunächst den Begriff des Körpers ein wenig.

Definition. *Ein* kommutativer Ring *ist eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen $+ : R \times R \longrightarrow R$, $\cdot : R \times R \longrightarrow R$, und zwei (nicht notwendigerweise verschiedenen) Elementen $\mathbb{0}$ und $\mathbb{1}$, derart dass folgende Axiome gelten:*

i) *Assoziatitvität von Addition und Multiplikation*
ii) *Kommutativität von Addition und Multiplikation*
iii) *Neutralität von $\mathbb{0}$ (bzw. $\mathbb{1}$) bzgl. der Addition (bzw. Multiplikation), also $\mathbb{0} + r = r$ und $\mathbb{1} \cdot r = r$ für alle $r \in R$.*
iv) *Distributivität der Multiplikation über die Addition*
v) *Existenz von Inversen (auch Negative genannt) bzgl. der Addition*

Es darf $\mathbb{0} = \mathbb{1}$ gelten. Man überlegt sich aber schnell, dass dies nur möglich ist, wenn $R = \{\mathbb{0}\} = \{\mathbb{1}\}$. Wir wollen diese Möglichkeit auf dem Rest des Übungszettels stillschweigend ausschließen.
Ansonsten besteht der einzige Unterscheid zum Begriff des Köpers darin, dass wir nicht die Existenz von Inversen bzgl. der Multiplikation verlangen. Jeder Körper ist offensichtlich ein kommutativer Ring und die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind ein kommutativer Ring, aber kein Körper. Das Adjektiv 'kommutativ' in 'kommutativer Ring' bezeichnet übrigens die Kommutativität der Multiplikation.

Als nächstes erinnern wir an folgende Sätze aus der Teilbarkeitslehre ganzer Zahlen:

Abgabetermin: 04.12. vor der Vorlesung

Satz/Definition (Division mit Rest). *Für je zwei ganze Zahlen $x, n \in \mathbb{Z}$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, derart dass*

$$x = an + b \text{ mit } 0 \leq b <| n |$$

Wir bezeichnen dann b mit $x\%n$.

Satz (Eudklid'sches Lemma). *Gegeben zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ und eine Primzahl p. Teilt p die Zahl ab, so teilt p entweder a oder b.*

Nun zu den Beispielen: Gegeben eine ganze Zahl $n \geq 2$.

Definition. *Setze*

$$\mathbb{Z}/n := \{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}$$

mit folgender Addition und Multiplikation

$$x +_n y := (x + y)\%n, \quad x \cdot_n y := (xy)\%n$$

und den offensichtlichen Wahlen (nämlich 0 und 1) für $\mathbb{0}$ und $\mathbb{1}$.

Aufgabe 1 (7 Punkte). *Zeigen Sie: $\mathbb{Z}/n$ mit obiger Addition und Multiplikation ist ein kommutativer Ring für jedes $n \geq 2$.*

Wir brauchen eine weitere Definition. Sei R ein kommutativer Ring.

Definition. *Ein Element $r \in R$ heißt* Nullteiler*, wenn es ein Element $\mathbb{0} \neq s \in R$ gibt, sodass $rs = \mathbb{0}$ (andernfalls heißt r* integer*). Ein Element heißt* Einheit*, wenn es ein Element $t \in R$ mit $rt = \mathbb{1}$ gibt.*

Aufgabe 2 (7 Punkte). *Zu einem Element $r \in R$ assoziieren wir die Abbildung*

$$\mu_r : R \longrightarrow R, x \longmapsto rx$$

Man zeige:

i) *Jede Einheit ist integer.*
ii) *r ist genau dann integer, wenn μ_r injektiv ist.*
iii) *r ist genau dann eine Einheit, wenn μ_r surjektiv ist.*
iv) *Ist R endlich, so gilt die Umkehrung von* i)*. Wie sieht das im Falle eines unendlichen Rings aus?*

Aufgabe 3 (6 Punkte). *Es sei $n \geq 2$. Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:*

i) *n ist eine Primzahl.*
ii) *0 ist der einzige Nullteiler in $\mathbb{Z}/n$.*
iii) *$\mathbb{Z}/n$ ist ein Körper.*

Die Fachschaft Mathematik feiert am 26.11. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 23.11., Di. 24.11. und Mi. 25.11. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de