ÜBUNGSZETTEL 4 - LINEARE ALGEBRA I

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Von nun an sei vorausgesetzt, dass die auftretenden Matrizen Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ haben. Bei der Lösung sollen nur solche Sätze aus der linearen Algebra benutzt werden, die bis einschließlich Freitag, 13. 11. (Ausgabetag des Zettels) in der Vorlesung vorgestellt wurden oder auf vorigen Übungszetteln zu beweisen waren. Allerdings ist nicht erforderlich, dass der Beweis in der Vorlesung bereits vollständig erfolgt ist.

Definition. *Die* transponierte Matrix *der $m \times n$-Matrix A ist die $n \times m$-Matrix A^T mit den Koeffizienten*

$$\left(A^T\right)_{i,j} = a_{j,i}$$

(mit $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$).

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** *Für Matrizen A bzw. B vom Format $l \times m$ bzw. $m \times n$ beweise man die Gleichheit $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.*

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** *Die $m \times n$-Matrix $\tilde{A}$ gehe aus der Matrix A durch elemtare Zeilenumformungen hervor. Man beweise, dass $\tilde{A} = UA$ mit einer invertierbaren $m \times m$-Matrix U gilt.*

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** *Es gelte $m < n$. Man beweise:*

i) *Wenn die $m \times n$-Matrix A ein Rechtsinverses hat, so ist dieses nicht eindeutig bestimmt.*
ii) *Wenn die $n \times m$-Matrix B ein Linksinverses hat, so ist dieses nicht eindeutig bestimmt.*

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** *Gegeben sei die folgende unvollständige Matrix*

$$\begin{pmatrix} 3+4i & 20 & -15 \\ 5 & ? & ? \end{pmatrix}$$

i) *Man finde für die mit einem ? bezeichneten fehlenden Koeffizienten solche Werte, dass die entstehende (komplexwertige) 2×3-Matrix kein Rechtsinverses hat. Begründen Sie, dass Ihre Antwort das Gewünschte leistet.*

Abgabetermin: 27.11. in der Vorlesung

i) *Ist die Lösung der im ersten Punkte beschriebenen Problemstellung eindeutig? Begründen Sie auch hier Ihre Antwort!*

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** *Welche der folgenen Beziehungen ist für beliebige Abbildungen $f : \Psi \longrightarrow \Omega$ sowie beliebige Teilmengen $X, Y \subseteq \Omega$ bzw. $A, B \subseteq \Psi$ richtig? Wenn die Frage zu verneinen ist, so entscheiden Sie bitte auch, ob man das $=$ derart durch eine der Inklusionen $\subseteq$ oder $\supseteq$ ersetzen kann, dass die Frage bejaht werden kann. Begründen Sie Ihre Antwort und erklären Sie mit kurzer Begründung, wie diese sich ändert, wenn man die Injektivität bzw. Surjektivität von f voraussetzt:*

i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
iii) $f(\Psi \setminus A) = \Omega \setminus f(A)$.
iv) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
v) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.
vi) $f^{-1}(\Omega \setminus X) = \Psi \setminus f^{-1}(X)$.

Help-Desk für lineare Algebra I: Montag 16-19 Uhr, Freitag 13-16 Uhr, Chiara Mazziotta (s6chmazz@uni-bonn.de), Raum N1.002