ÜBUNGSZETTEL 3 - LINEARE ALGEBRA I

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Es sei wie auf dem vorigen Blatt vorausgesetzt, dass die auftretenden Matrizen Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ haben. Bei der Lösung sollen nur solche Sätze aus der linearen Algebra benutzt werden, die bis einschließlich Freitag, 6. 11. (Ausgabetag des Zettels) in der Vorlesung vorgestellt wurden oder auf vorigen Übungszetteln zu beweisen waren. Allerdings ist nicht erforderlich, dass der Beweis in der Vorlesung bereits vollständig erfolgt ist. Von den 23 für diese Aufgaben vergebenen Punkte sind 3 Zusatzpunkte, die nicht in die Festsetzung des Punktelimits fr die Klausurteilnahme eingehen.
Das Vektorzeichen über Elementen von $\mathbb{K}^m$ soll bei Bearbeitung dieses Übungszettels erstmals weggelassen werden.

Definition. *Eine Abbildung $L : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ wird* linear *genannt, wenn für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:*

i) $L(x + y) = L(x) + L(y)$.
ii) $L(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot L(x)$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Man zeige: Für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ existiert genau eine $m \times n$-Matrix A mit $L(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$.*

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.** *Man zeige:*

i) *Wenn eine injektive lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ existiert, so gilt $m \geq n$.*
ii) *Wenn eine surjektive lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ existiert, so gilt $m \leq n$.*
iii) *Wenn eine bijektive lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ existiert, so gilt $m = n$.*

Definition. *Gegeben sei eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ zwischen zwei Mengen. Für Teilmengen $S \subseteq M$, $R \subseteq N$ setzen wir*

$$f(S) = \big\{ n \in N \;\big|\; \text{es gibt ein } s \in S \text{ mit } f(s) = n \big\}$$
$$f^{-1}(R) = \big\{ m \in M \;\big|\; f(m) \in R \big\}.$$

Abgabetermin: 20.11. in der Vorlesung

Man nennt diese Teilmengen von N bzw. M das Bild *von S bzw. das* Urbild *von R unter der Abbildung.*

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** *Welche der folgenden Beziehungen gelten für beliebige Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ zwischen beliebigen Mengen und beliebige Teilmengen $S \subseteq M$, $R \subseteq N$? Geben Sie jeweils Beweise oder Gegenbeispiele an!*

i) $f^{-1}(f(S)) \subseteq S$
ii) $f^{-1}(f(S)) \supseteq S$
iii) $f(f^{-1}(R)) \subseteq R$
vi) $f(f^{-1}(R)) \supseteq R$
v) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
vi) $f(\emptyset) = \emptyset$

Für welche dieser Punkte verändert sich die Antwort, wenn f als entweder injektiv oder surjektiv vorausgesetzt wird?

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** *Man bestimme alle Lösungen folgenden Gleichungssystems:*

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +4y & +6z & = & 3 \\ 3x & +2y & & = & 6 \\ 3x & & -6z & = & 9 \\ 3x & -2y & -12z & = & 12 \end{array}$$

Help-Desk für lineare Algebra I: Montag 16-19 Uhr, Freitag 13-16 Uhr, Chiara Mazziotta (s6chmazz@uni-bonn.de), Raum N1.002