ÜBUNGSZETTEL 12 - LINEARE ALGEBRA I

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Bei der Lösung sollen nur solche Sätze aus der linearen Algebra benutzt werden, die bis einschließlich Freitag, 29.01. (Ausgabetag des Zettels) in der Vorlesung oder auf einem vorherigen Übungszettel vorgestellt wurden. Allerdings ist nicht erforderlich, dass der Beweis in der Vorlesung bereits vollständig erfolgt ist. Es befinden sich wieder einmal 5 Punkte mehr auf dem Zettel als üblich, die sind wie zuvor Bonus.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** *Gegeben eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen $f : V \to W$, so kann man folgende Abbildungen betrachten:*

$$Alt_k(f) : Alt_k(W) \longrightarrow Alt_k(V)$$

gegeben durch

$$\psi \longmapsto \psi \circ f^{\times k}$$

wobei $f^{\times k}k : V^k \to W^k$ die k-fache kartesische Potenz von f bezeichnet. Diese heißen die von f induzierten Abbildungen *auf alternierenden Multilinearformen.*
Zeigen Sie:

i) *$Alt_k(g \circ f) = Alt_k(f) \circ Alt_k(g)$ und $Alt_k(id) = id$, wenn $g : W \to U$ eine weitere lineare Abbildung ist.*
ii) *Ist $V = W$ n-dimensional, so ist $Alt_n(f)$ gleich der Multiplikation mit der Determinatnen von f.*

Die unter i) gelisteten Eigenschaften fasst man in der *Kategorientheorie* gerne unter dem Stichwort *(kontravariante) Funktorialität* zusammen. Wichtiger für uns ist aber wohl die Tatsache, dass laut eines Satzes der Vorlesung der Raum $Alt_n(V)$ unter den Voraussetzungen von ii) eindimensional ist. Demzufolge muss nämlich $Alt_n(f)$ schon a priori durch Multiplikation mit einer wohlbestimmten Zahl gegeben sein. Es ergibt sich also ein alternativer, deutlich abstrakterer, aber sehr eleganter Zugang zur Determinantentheorie, indem man ii) zur *Definition* von Determinanten benutzt.

Abgabetermin: 05.02. vor der Vorlesung

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Es sei $A \in Mat(n,n;K)$ eine Matrix mit $det(A) \neq 0$. Dann gibt es ja für jedes $b \in K^n$ genau ein $x \in K^n$ mit*

$$A \cdot x = b$$

Zeigen Sie als Anwendung der Cramer'schen Regel: Definieren wir Matrizen $A_{k,b}$ durch

$$\left(A_{k,b}\right)_{i,j} = \begin{cases} b_i & \textit{falls } k = j \\ A_{i,j} & \textit{sonst} \end{cases}$$

so gilt

$$x_k = \frac{det(A_{k,b})}{det(A)}$$

Man beachte: Dies ist eine geschlossene Formel (!) zur Lösung solcher Gleichungssysteme.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** *Wir definieren eine Abbildung*

$$P : \Sigma_n \longrightarrow Mat(n,n;K)$$

durch

$$\left(P(\pi)\right)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } \pi(i) = j \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

i) *$P(\pi)$ ist für jedes $\pi \in \Sigma_n$ invertierbar. Die entstehende Abbildung $P : \Sigma_n \to Gl_n(K)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.*
ii) *Das Bild von P sind genau die jenigen $n \times n$-Matrizen, bei denen jede Zeile und jede Spalte aus genau einer 1 und sonst nur 0'en bestehen.*
iii) *Für jedes $\pi \in \Sigma_n$ gilt $det(P(\pi)) = sgn(\pi)$.*

Matrizen wie unter ii) beschrieben heißen aus hoffentlich nun offensichtlichem Grunde *Permutationsmatrizen.*

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** *Wir definieren eine Abbildung*

$$V : K^n \longrightarrow Mat(n,n;K)$$

durch

$$\left(V(x)\right)_{i,j} = x_i^{j-1}$$

Zeigen Sie:

$$det(V(x)) = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

Die hier definierten Matrizen heißen *Vandermonde'sche Matrizen* und sind in der Theorie der Polynome vielseitig einsetzbar.

Help-Desk für lineare Algebra I: Montag 16-19 Uhr, Donnerstag 10-13 Uhr, Chiara Mazziotta (s6chmazz@uni-bonn.de), Raum N1.002