ÜBUNGSZETTEL 10 - LINEARE ALGEBRA I

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Bei der Lösung der ersten drei Aufgaben sollen nur solche Sätze aus der linearen Algebra benutzt werden, die bis einschließlich Freitag, 08.01. (Ausgabetag des Zettels) in der Vorlesung oder auf einem vorherigen Übungszettel vorgestellt wurden. Allerdings ist nicht erforderlich, dass der Beweis in der Vorlesung bereits vollständig erfolgt ist. Im Hinblick auf die Probeklausur soll in den letzten beiden Aufgaben auch das Wissen der darauffolgenden Vorlesungswoche genutzt werden.

Aufgabe 1 (3 Punkte). *Sei $f : V \longrightarrow V$ eine Selbstabbildung eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, sowie B und B' Basen von V. Zeigen Sie:*

$$det(Mat_{B,B}(f)) = det(Mat_{B',B'}(f))$$

Man sagt, dass die Determinante unabhängig von der Wahl einer Basis ist und schreibt für obige Zahl einfach $det(f)$. Das heißt aber freilich nicht, dass auch $det(f) = det(Mat_{B,B'}(f))$ gelten muss. Geben Sie hierfür ein Gegenbeispiel.

Insbesondere zeigt diese Aufgabe, dass es nicht unmittelbar einen sinnvollen Begriff für die Determinante einer linearen Abbildung zwischen verschiedenen Vektorräumen gibt, selbst wenn diese die gleiche, endliche Dimension besitzen.

Aufgabe 2 (2 Punkte). *Zeigen Sie: Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist das Produkt ihrer Diagonalelemente.*

Aufgabe 3 (4 Punkte). *Berechnen Sie die Determinante folgender komplexer Matrix*

$$\begin{pmatrix} 3+3i & 2+2i & 1-4i & i \\ -3-3i & -5-i & -3+15i & 0 \\ i & 2i & 6+i & 0 \\ -3i & 6-4i & 3-18i & 1-3i \end{pmatrix}$$

Abgabetermin: 22.01. vor der Vorlesung

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** *Bestimmen Sie die Eigenwerte folgender Matrix und zwar über jedem der Körper* $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *und* $\mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie auch jeweils eine Basis des Eigenraums und die Basiswechselmatrizen, die die Matrix in Diagonalgestalt bringen, falls dies möglich ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** *Man bestimme für die folgenden linearen Abbildungen, ob sie sich jeweils durch eine Diagonalmatrix darstellen lassen (und wenn ja, wie diese aussieht, aber nicht unbedingt, wie eine zugehörige Basis aussieht):*

i) *Sei* P_n *der Vektorraum aller polynomiellen Funktionen* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vom Grad* $\leq n$. *Betrachte dann die* $\mathbb{R}$*-lineare Abbildung*

$$' : P_n \to P_n,$$

die eine solche Funktion auf ihre Ableitung schickt.

ii) *Die durch die Matrizen*

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben Abbildungen $K^3 \to K^3$, *für* $K = \mathbb{Q}$ *oder* $\mathbb{Z}/p$, p *prim.*

iii) *Die durch die Matrizen*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben Abbildungen $K^3 \to K^3$ *für* $K = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$.

Anmerkung: *Für Teil i) setzen wir einmal als bekannt voraus, dass*

$$dim_{\mathbb{R}}(P_n) = n + 1$$

gilt; für einen kurzen (!) Nachweis mit Mitteln der Analysis I gibt es aber zwei Extrapunkte.

Help-Desk für lineare Algebra I: Montag 16-19 Uhr, Donnerstag 10-13 Uhr, Chiara Mazziotta (s6chmazz@uni-bonn.de), Raum N1.002