ÜBUNGSZETTEL 1 - LINEARE ALGEBRA I

JENS FRANKE, FABIAN HEBESTREIT

Wir setzen hier stets voraus, dass die auftretenden Matrizen Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ haben.

Definition. *Sei A eine $l \times m$-Matrix und B eine $m \times n$-Matrix. Mit $C = A \cdot B$ bezeichen wir die Matrix mit den Koeffizienten*

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k} \qquad\qquad 1 \leq i \leq l \text{ und } 1 \leq k \leq n.$$

Um Matrizen A und B multiplizieren zu können, muss also die Zahl der Spalten von A mit der Zahl der Zeilen von B übereinstimmen. Das Produkt hat dann ebensoviele Zeilen wie A und ebensoviele Spalten wie B.

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** *Man beweise: Das auf diese Weise definierte Matrixprodukt ist assoziativ, es gilt also $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ für je drei Matrizen, für die beide Produkte definiert sind.*

Es sollen wirklich die Koeffizienten auf beiden Seiten ausgerechnet und die für die jeweiligen Umformungsschritte benutzten Gesetze der Arithmetik in $\mathbb{K}$ benannt werden. Ein Beweis, der die Identifikation von Matrizen mit linearen Abbildungen und die Assoziativität der Verknüpfung von Abbildungen benutzt, ist also nicht gewünscht. Insbesondere gilt dies für Reproduktionen des in der Vorlesung gebrachten Beweises.

Wir erinnern an die Definition von 'Zeilenstufenform' aus der Vorlesung.

Definition. *Eine* Zeilenstufenmatrix *vom Rang k ist eine $m \times n$"=Matrix A mit $k \leq m$, für die eine streng monoton wachsende Folge $\left(l_i\right)_{i=1}^{k}$ ganzer Zahlen mit $1 \leq l_i \leq n$ existiert, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

- *Für $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j < l_i$ gilt $a_{i,j} = 0$.*
- *Für $1 \leq i \leq k$ gilt $a_{i,l_i} \neq 0$.*
- *Für $k < i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ gilt $a_{i,j} = 0$.*

Abgabetermin: 06.11. in der Vorlesung

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Man zeige: Die Zahl k und die Folge $\left(l_i\right)_{i=1}^k$ sind durch die Matrix A eindeutig bestimmt.*

Aufgabe 3 (11 Punkte)**.** *Für die folgenden Matrizen entscheide man, ob sie in Zeilenstufenform vorliegen. Wenn dies der Fall ist, gebe man den Rang k und die Folge $\left(l_i\right)_{i=1}^k$ an:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Help-Desk für lineare Algebra I: Montag 16-19 Uhr, Freitag 13-16 Uhr, Chiara Mazziotta (s6chmazz@uni-bonn.de), Raum N1.002