Lineare Algebra I

Prof.Dr.Jens Franke
Dr. Fabian Hebestreit

Wintersemester 2015/16

Probeklausur

Bitte geben Sie auf **jedem** Blatt Ihrer Lösung Namen **und** Matrikelnummer an.

Name: Name des Tutors:
Vorname: Übungsgruppe:
Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte								

MUSTERLÖSUNG!

Es gibt insgesamt 50 Punkte. Viel Erfolg!

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Man berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Lösung. Entwickeln wir diese Determinante etwa nach der ersten Spalte (und nennen wir obige Matrix A):

$$\det(A) = 1 \cdot \det(A_{1,1}) - 0 \cdot \det(A_{2,1}) + 0 \cdot \det(A_{3,1}) - 3 \cdot \det(A_{4,1})$$

wobei natürlich $A_{i,j}$ hier die 3×3-Matrix bezeichnet, die durch Streichen der i-ten Zeilen und j-ten Spalte aus A entsteht (und nicht etwa den Matrixeintrag an Position (i, j)). Für die verbleibenden Determinanten verwenden wir die Sarrus-Regel. Man erhält:

$$\begin{aligned} \det(A_{1,1}) &= \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 4 \\ &- 4 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= 16 - 24 = -8 \\ \det(A_{4,1}) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 0 \\ &- 0 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 8 - 12 = -4 \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$det(A) = -8 - 3 \cdot (-4) = 4$$

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Man definiere das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

Lösung. Es ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Man bestimme die komplexen Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung. Bekanntermaßen sind die Eigenwerte einer Matrix M ja gerade die Nullstellen des charakterischen Polynoms P_M. Berechnen wir zunächst das charakterististische Polynom obiger Matrix (die wir wieder A nennen). Es gilt

$$\begin{aligned} P_A &= \det(X \cdot Id - A) \\ &= \det \begin{pmatrix} X - 1 & 3 \\ 3 & X - (-1) \end{pmatrix} \\ &= (X - 1)(X + 1) - 3 \cdot 3 \\ &= X^2 - 10 \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind offenbar die beiden zweiten Wurzeln aus 10. Also sind auch die Eigenwerte $\pm\sqrt{10}$.

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Man definiere den Begriff „Automorphismus eines K-Vektorraumes".

Lösung. Die wohl einfachste, korrekte Lösung dieser Aufgabe lautet: Ein Automorphismus (eines K-Vektorraumes V) ist ein Endomorphismus (von V), der ein Isomorphismus ist.
Eine etwas ausformuliertere Lösung ist: Ein Automorphismus (eines K-Vektorraumes V) ist eine bijektive, lineare Selbstabbildung (von V).
Oder auch: Ein Automorphismus (eines K-Vektorraumes V) ist eine lineare Selbstabbildung (von V), die eine Inverse besitzt.

Aufgabe 5 (8 Punkte)**.** Man bestimme alle rationalen Lösungen des Gleichungssystemes

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 4y + 9z &= 3 \end{aligned}$$

Lösung. Die Lösung ist für den Fall der korrigierten Version mit einem z in der rechten unteren Ecke!

Wir gehen strikt nach Gauß'schem Eliminierungsverfahren vor: Schreiben wir I, II und III für die Zeilen, so erhalten wir folgende Abfolge von Umformungen:

$$II \rightsquigarrow II - I, III \rightsquigarrow III - I; \quad III \rightsquigarrow III - 3 \cdot II; \quad III \rightsquigarrow \frac{1}{2} \cdot III$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$I \rightsquigarrow I - III, II \rightsquigarrow II - 2 \cdot III; \quad I \rightsquigarrow I - II$$

$$\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Hier lässt sich die Lösung nun direkt ablesen: $x = -\frac{1}{2}, y = 2, z = -\frac{1}{2}$.

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 6 (12 Punkte)**.** Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n; K)$. Man definiere die Adjunkte von A und beweise die Cramersche Regel

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det(A)\mathbf{1}_n.$$

Lösung. Die Adjunkte ist gegeben durch:

$$\mathrm{Adj}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(Min(A; j, i))$$

Man beachte den Tausch von i und j! Zur Unterscheidung vom Matrixeintrag $A_{i,j}$ bezeichnen wir die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte ensteht ausnahmsweise mit $Min(A; i, j)$.

Beweis der Cramer'schen Regel:

$$\begin{aligned}(A \cdot \mathrm{Adj}(A))_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} Adj(A)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} (-1)^{k+j} \det(Min(A; j, k))\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck erkennt man nun mittels des Laplace'schen Eintwicklungssatzes als Zeilenentwicklung der Matrix, die aus A entsteht indem man die j-te Zeile von A durch die i-te ersetzt: Nennen wir diese Matrix einmal (zu noch größerer Verwirrung) $A(j, i)$, also

$$A(j, i)_{x,y} = \begin{cases} A_{x,y} & x \neq j \\ A_{i,y} & x = j \end{cases}$$

Entwickeln wir nun $\det(A(j, i))$ nach der j-ten Zeile, so gilt wie gewünscht

$$\begin{aligned}\det(A(j, i)) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} A(j, i)_{j,k} \det(Min(A(j, i); j, k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} A_{i,k} \det(Min(A; j, k)) \\ &= (A \cdot \mathrm{Adj}(A))_{i,j}\end{aligned}$$

da $Min(A(j,i);j,k) = Min(A;j,k)$ (die j-te Zeile in der sich A und $A(j,i)$ unterscheiden wird ja gerade gestrichen).
Gilt nun $i \neq j$ so enthält $A(j,i)$ zwei gleiche Zeilen. Es folgt

$$(A \cdot \mathrm{Adj}(A))_{i,j} = \det(A(j,i)) = 0$$

in diesem Fall. Für $i = j$ gilt offenbar $A(j,i) = A$ und demzufolge

$$(A \cdot \mathrm{Adj}(A))_{i,j} = \det(A)$$

Dies sind aber gerade auch die Koeffizienten von

$$\det(A) \cdot \mathbf{1}_n$$

Uff!

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 7 (9 Punkte, Entscheidungsfragen)**.** Man kennzeichne wahre Aussagen mit 'W' und falsche mit 'F'. Für richtig gekennzeichnete Aussagen erhält man $+1$, für falsch gekennzeichnete -1 und für ungekennzeichnete Aussagen 0 Punkte, wobei keine Verrechnung der Minuspunkte über diese Aufgabe hinweg stattfindet (also für diese Aufgabe schlimmstenfalls 0 Punkte erzielt werden).
Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebiges $f : U \longrightarrow V$ und $g : V \longrightarrow W$, wobei U, V und W Vektorräume über einem Körper K sind und f, g K-lineare Abbildungen?

W Wenn g ein Monomorphismus und W endlichdimensional ist, so ist V endlichdimensional.

Da eine Injektion jeden Satz linear unabhängiger Elemente auf einen ebensolchen abbildet, kann es in W keine unendliche linear unabhängige Teilmenge geben (ja nichtmal mit mehr als $dim(W)$ Elementen).

F Wenn gf ein Isomorphismus ist, so ist f ein Epimorphismus.

Die Abbildungen $0 = f : 0 \to K$ und $0 = g : K \to 0$ liefern ein einfaches Gegenbeispiel.

W Wenn gf ein Isomorphismus und $S \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von V ist, so ist $g(S)$ ein Erzeugendensystem von W. Die Lösung ist für die korrigierte Version, mit $g(S)$ anstatt $f(S)$.

Da gf ein Isomorphismus ist, muss g surjektiv sein. Die gewünschte Eigenschaft folgt nun aus Aufgabe 4 von Zettel 7.

W Wenn f ein Isomorphismus ist, so gilt $\dim U = \dim V$.

Dies war ein Satz der Vorlesung. (Kurze Begründung: Ein Isomorphismus bildet eine Basis auf eine Basis ab!)

W Wenn $U = V$ endlichdimensional und f nicht invertierbar ist, so gilt $\det f = 0$.

Auch dies war ein Satz der Vorlesung. Es folgt zum Beispiel auch aus der Cramer'schen Regel.

F Wenn $K = \mathbb{C}$ und $U = V$ gilt, so hat f einen Eigenwert.
Ein etwas blödes Gegenbeispiel ist der Nullvektorraum. Ein etwas cooleres Gegenbeispiel ist der unendlich dimensionale Vektorraum der komplexen Polynome mit der Selbstabbildung $- \cdot X : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$.

W Wenn $(u_1, \ldots, u_n)$ Elemente von U und das Tupel $\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$ in V linear unabhängig ist, so ist $(u_1, \ldots, u_n)$ in U linear unabhängig.
Eine nicht-triviale Darstellung $0 = \sum_i a_i u_i$ ergibt eine immer noch nicht-triviale Darstellung

$$0 = f(0) = f(\sum a_i u_i) = \sum a_i f(u_i)$$

Eine Permutation π nennt man *gerade* (bzw. *ungerade*), wenn $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ (bzw. $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$) gilt.

F Jede gerade Permutation $\pi \in S_n$ für $n \geq 1$ kann als Produkt zweier ungerader Elemente von S_n dargestellt werden.
Diese Aufgabe ist etwas fies. Für $n \geq 2$ ist es richtig: Man wähle sich eine Transposition τ. Für ein gerades Element π gilt dann $\pi = (\pi\tau) \cdot \tau$ und beide Faktoren sind ungerade. Für $n = 1$ jedoch gibt es überhaupt keine ungeraden Elemente und die Aussage ist falsch.

F Jedes ungerade Element von S_{10} kann als Produkt von 2016 Transpositionen dargestellt werden.
Jede gerade Potenz eines Elements ist gerade, insbesondere also auch alle 2016ten.