Lineare Algebra I

Prof.Dr.Jens Franke
Dr. Fabian Hebestreit
Wintersemester 2015/16

Probeklausur

Bitte geben Sie auf **jedem** Blatt Ihrer Lösung Namen **und** Matrikelnummer an.

Name: Name des Tutors:
Vorname: Übungsgruppe:
Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte								

Erfolgsprozentsatz der Klausur: .... Prozent

Unterschrift des Prüfers: **Endnote:**

Es gibt insgesamt 30 Punkte. Viel Erfolg!

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 (8 Punkte). Man berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Man definiere das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Man bestimme die komplexen Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Man definiere den Begriff „Automorphismus eines K-Vektorraumes".

Aufgabe 5 (8 Punkte)**.** Man bestimme alle rationalen Lösungen des Gleichungssystemes

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 4y + 9x &= 3 \end{aligned}$$

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 6 (12 Punkte)**.** Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, n; K)$. Man definiere die Adjunkte von A und beweise die Cramersche Regel

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det(A)\mathbf{1}_n.$$

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 7 (9 Punkte, Entscheidungsfragen). Man kennzeichne wahre Aussagen mit 'W' und falsche mit 'F'. Für richtig gekennzeichnete Aussagen erhält man $+1$, für falsch gekennzeichnete -1 und für ungekennzeichnete Aussagen 0 Punkte, wobei keine Verrechnung der Minuspunkte über diese Aufgabe hinweg stattfindet (also für diese Aufgabe schlimmstenfalls 0 Punkte erzielt werden).
Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebiges $f : U \longrightarrow V$ und $g : V \longrightarrow W$, wobei U, V und W Vektorräume über einem Körper K sind und f, g K-lineare Abbildungen?

- ☐ Wenn g ein Monomorphismus und W endlichdimensional ist, so ist V endlichdimensional.
- ☐ Wenn gf ein Isomorphismus ist, so ist f ein Epimorphismus.
- ☐ Wenn gf ein Isomorphismus und $S \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von V ist, so ist $f(S)$ ein Erzeugendensystem von W.
- ☐ Wenn f ein Isomorphismus ist, so gilt $\dim U = \dim V$.
- ☐ Wenn $U = V$ endlichdimensional und f nicht invertierbar ist, so gilt $\det f = 0$.
- ☐ Wenn $K = \mathbb{C}$ und $U = V$ gilt, so hat f einen Eigenwert.
- ☐ Wenn $(u_1, \ldots, u_n)$ Elemente von U und das Tupel $\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$ in V linear unabhängig ist, so ist $(u_1, \ldots, u_n)$ in U linear unabhängig.

Eine Permutation π nennt man *gerade* (bzw. *ungerade*), wenn $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ (bzw. $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$) gilt.

- ☐ Jede gerade Permutation $\pi \in S_n$ für $n \geq 1$ kann als Produkt zweier ungerader Elemente von S_n dargestellt werden.
- ☐ Jedes ungerade Element von S_{10} kann als Produkt von 2016 Transpositionen dargestellt werden.