# MAT115.1: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK – DETAILS

DANIEL TUBBENHAUER

**Disclaimer**

Bitte zögern Sie nicht mich im Falle von Fragen zu kontaktieren.

**Literatur**

Ich folge dem ersten Kapitel von [AE06], bis auf in der letzten Vorlesung, wo ich einige (elementare) Konzepte aus [J03] bespreche.

**Wann und wo?**

- Daten.
  - Jeden Montag 10:15-12:00.
  - Raum Y03G91, Universität Zürich, Institut für Mathematik.
  - Erste Vorlesung: 24.Sep.2018.
  - Letzte Vorlesung: 17.Dez.2018.
  - Ausnahme: Die Vorlesung am 26.Nov.2018 fällt aus. Dafür gibt es am 15.Nov.2018 anstelle der Übungsgruppen eine Ersatzvorlesung (13:15-15:00, Raum Y27H28).
- Übungen.
  - Jeden Donnerstag 13:00-13:45 (Leiter: Stefano stefano.gioffre@math.uzh.ch) oder 14:00-14:45 (Leiter: Emil emil.jacobsen@math.uzh.ch).
  - Anfangsbuchstaben A–K sind in der Übung 14:00-15:00; Anfangsbuchstaben L–Z in der Übung 13:00-14:00
  - Raum Y27H28, Universität Zürich, Institut für Mathematik.
  - Erste Übung: 27.Sep.2018.
  - Letzte Übung: 20.Dez.2018.
- Klausur.
  - 28.Jan.2019. Zeit und Raum werden noch bekanntgegeben.
- Website http://www.dtubbenhauer.com/lecture-GdM-2018.html

**Regeln für die Übungszettel.**

- **Abgabe**: 01.Okt.2018 (erste Abgabe) bis 17.Dez.2018 (letzte Abgabe) vor der Vorlesung. In der Woche vom 26.Nov.2018 werden die Zettel in den Übungen abgegeben.
- Die Übungen sind immer am Donnerstag, vom 27.Sep.2018 (erste) bis zum 20.Dez.2018 (letzte). Nur die Übungen am 15.Nov.2018 fallen aus.

▷ Es wird 12 Übungszettel geben mit jeweils vier Aufgaben. Jede Aufgabe gibt 10 Punkte. Es gibt auch einen dreizehten Übungszettel, welcher nicht bewertet wird.

▷ Sie brauchen insgesamt 240 Punkte um zu der Klausur zugelassen zu werden, und alle Übungszettel werden für die Klausur relevant sein.

▷ Alle Übungszettel sind jederzeit auf der Homepage

`http://www.dtubbenhauer.com/lecture-GdM-2018.html`

verfügbar. Abzugeben ist aber immer nur ein Übungszettel.

▷ Schreiben Sie ihren Namen deutlich auf ihre Lösungen und heften Sie diese zusammen. Abgabe erfolgt alleine oder zu zweit.

▷ Tippfehler auf den Übungszetteln können nie ausgeschlossen werden.

**Zeitplan und Details.**

▷ Erste Vorlesung "Etwas Logik".

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 24.Sep.2018, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Grundlagen der Logik, Implikationen, Beweismethoden.
- **Ziele.** Grundlagen der Aussagenlogik: Aussagen, Negationen, Konjuktionen, Disjunktionen, Wahrheitstafeln. Danach Eigenschaften und Quantoren, und erste Folgerungen z.B. doppelte Negation [AE06, Beispiel I.1.1 und Bemerkung I.1.2]. Dann werden Implikationen besprochen: Hinreichend, notwendig, Kontraposition etc. Zum Schluss kommt noch Satzstruktur dran (Voraussetzung, Behauptung, Beweis) und elementare Beweismethoden (direkte und indirekte Beweise).
- **Bemerkung.** Zu Begin der Vorlesung werden auch einige Formalitäten besprochen.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.1].

▷ Zweite Vorlesung "Naive Mengenlehre I".

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 01.Okt.2018, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Grundlagen der Mengenlehre, Mengenoperationen, Regeln von De Morgan.
- **Ziele.** Zuerst werden Menge naiv eingeführt und einige elementare Definitionen erwähnt, z.B. Untermenge, Obermenge. Eigenschaften der leeren Menge [AE06, Bemerkung I.2.1]. Danach kommen weitere elementare Mengeoperationen dran: Potenzmenge, Komplemente, Durchschnitte, Vereinigungen, Venn Diagramme [AE06, Bemerkung I.2.3]. Dann einige Rechenregeln [AE06, Satz I.2.4], und Produktmengen und ihre elementaren Eigenschaften [AE06, Satz I.2.6]. Zum Schluss Mengensysteme und ihre Rechenregeln [AE06, I.2.7].

- **Bemerkung.** Die Mengenlehre, welche besprochen wird, ist naiv: Formal gesehen sollte man alles über Axiome einführen, aber das führt zu weit.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.2].

▷ Dritte Vorlesung "Naive Mengenlehre II".

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 08.Okt.2018, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Abbildungen, injektiv, surjektiv, bijektiv.
- **Ziele.** Definition vom Begriff Abbildung [AE06, Bemerkung 1.3.1] und weitere grundlegende Begriffe wie Wertevorrat, Definitionsbereich, Zielmenge, Graph etc. Danach kommen einige einfache Beispiel [AE06, Beispiele I.3.2] wie z.B. die leere Abbildung oder die Indentitätsabbildung, und einige Abbildungskonstruktionen wie die eingeschränkte Abbildung. Dann kommt die Komposition von Abbildungen [AE06, Satz I.3.3] und einige Grundlagen über kommutative Diagramme. Dann elementare Eigenschaften von Abbildungen (injektiv, Urbild etc.) und die Umkehrabbildung [AE06, Sätze I.3.5 und I.3.6]. Zum Schluss Mengenabbildungen [AE06, Satz I.3.8] und die Menge der Abbildungen.
- **Bemerkung.** Auch Abbildungen sind Mengen, aber so arbeitet man nicht mit ihnen.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.3].

▷ Vierte Vorlesung "Naive Mengenlehre III".

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 15.Okt.2018, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Relationen, Ordnungen, Äquivalenzklassen.
- **Ziele.** Definition einer Relation als Menge, danach einige elementare Begriffe (reflexiv etc.) und die Definition einer Äquivlanzrelation. Danach die Zerlegungseigenschaft von Äquivlanzrelation [AE06, Satz I.4.1] und die induzierte Abbildung [AE06, Beispiele I.4.2(c)]. Dann geordnete Mengen via Ordnungsrelationen und grundlegende Begriffe wie Minimum, Schranke (welche im Allgemeinen nicht existieren müssen [AE06, Bemerkung I.4.5]). Dann Abbildungen auf geordneten Mengen und ihre Grundbegriffe (z.B. steigend), und zum Schluss noch ein paar Details zu Verküpfungen auf Mengen z.B. die Eindeutigkeit der 1 [AE06, Satz I.4.11].
- **Bemerkung.** Auch Relationen sind Menge. Aber auch hier gilt, dass man meist nicht so mit ihnen umgeht.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.4].

▷ Fünfte Vorlesung "Die natürlichen Zahlen I".

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 22.Okt.2018, 10:15–12:00.

- **Keywords.** Peano Arithmetik, grundlegenden Axiome.
- **Ziele.** Einführung der Peano Axiome mit einigen Kommentaren und Regeln [AE06, Bemerkungen I.5.1 und I.5.2]. Dann der Hauptsatz bzgl. Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}_0$ [AE06, Theorem I.5.3]. (Der Beweis ist lang.) Zum Schluss noch kurz der Euklidsche Algorithmus [AE06, Satz I.5.4].
- **Bemerkung.** Vorsicht: Klar sind alle Aussagen trivial, aber der Punkt ist diese aus den gegebenen Axiomen zu beweisen.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.5] bis einschliesslich [AE06, Satz I.5.4].

▷ Sechste Vorlesung "Die natürlichen Zahlen II".

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 29.Okt.2018, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Das Induktionsprinzip.
- **Ziele.** Zuerst kommt der Wohlordnungssatz für $\mathbb{N}_0$ [AE06, Satz I.5.5], und eine Anwendung davon [AE06, Satz I.5.6]. Dann kommt das Induktionsprinzip [AE06, Satz I.5.7] und eine Variante davon [AE06, Satz I.5.9]. Zum Schluss noch einige Beispiele zur Induktion [AE06, Beispiele I.5.8].
- **Bemerkung.** Vorsicht: Induktion ist ein Axiom.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.5] von [AE06, Satz I.5.5] bis einschliesslich [AE06, Satz I.5.9].

▷ Siebte Vorlesung "Die natürlichen Zahlen III".

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 05.Nov.2018, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Beispiele, Rekursionen.
- **Ziele.** Wir starten mit weiteren Beispielen für das Induktionsprinzip. Insbesondere, das man mit Klammern nicht vorsichtig sein muss [AE06, Beispiel I.5.10]. Dann kommt eine wichtige Variante der Induktion, genannt Rekursion [AE06, Satz I.5.11]. Dazu [AE06, Beispiel I.5.12]. Zum Abschluss noch mehrfache Summen und Produkte und deren Rechenregeln [AE06, Bemerkung I.5.13]. Rekursive kann dann die Potenz und die Fakultät definiert werden [AE06, Beispiele I.5.14].
- **Bemerkung.** Das Rekursionsprinzip ist wichtig in vielen Anwendungen, aber auch ein Axiom im gewissen Sinne.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.5] von [AE06, Satz I.5.10] bis zum Ende.

▷ Achte Vorlesung "Naive Mengenlehre IV".

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 12.Nov.2018, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Abzählbarkeit, Satz von Cantor.

- **Ziele.** Zuerst wird naiv der Begriff der Anzahl der Elemente einer Menge definiert und gezeigt, dass $\mathbb{N}_0$ unendlich viele Elemente hat [AE06, Beispiele I.6.1]. Dann wird der Begriff der Mächtigkeit definiert und was es heißt abzählbar zu sein [AE06, Bemerkung 6.4]. Dann kommt der Satz von Cantor [AE06, Theorem I.6.5], gefolgt von einigen Aussagen über abzählbare Mengen [AE06, Sätze I.6.7, I.6.8 und I.6.9]. Zum Abschluss noch ein Beispiel einer überabzählbaren Menge [AE06, Satz I.6.11].
- **Bemerkung.** Beachten Sie, dass Kardinalität eigentlich auch eine Menge ist.
- **Literatur.** Teile von [AE06, Sektion I.6].

▷ Neunte Vorlesung “Die rationalen Zahlen I”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 15.Nov.2018, 13:15–15:00.
- **Keywords.** $\mathbb{Z}$, Definition durch Äquivalenzklassen.
- **Ziele.** Kurz die Definition, was ein Ring ist, und danach einige elementare Begriffe und Einschaften von Ringen z.B. [AE06, Bemerkungen I.8.1]. Dann einige Beispiele und weitere Grundbegriffe [AE06, Beispiele I.8.2], und dann der binomische Lehrsatz [AE06, Satz I.8.4]. Zuletzt wird $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}_0$ definiert bzw. konstruiert [AE06, Theorem I.9.1]. (Der Beweis ist lang.)
- **Bemerkung.** Der Begriff des Ringes wird im Buch verwendet, aber man braucht ihn für die Definition nicht umbedingt. Trotzdem ist er hilfreich.
- **Literatur.** Teile von [AE06, Sektion I.8] (bis einschliesslich [AE06, Satz I.8.4]), [AE06, Sektion I.9] bis einschliesslich [AE06, Theorem I.9.1].

▷ Zehnte Vorlesung “Die rationalen Zahlen II”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 19.Nov.2018, 10:15–12:00.
- **Keywords.** $\mathbb{Q}$, Definition via Quotientenkörper.
- **Ziele.** Zuerst wird der Begriff des Körpers eingeführt und einige elementare Beobachtungen festgehalten [AE06, Bemerkungen I.8.7]. Dann kommt die Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ [AE06, Theorem I.9.2]. (Der Beweis ist lang.) Zum Schluss werden noch einige einfache Aussagen über $\mathbb{Q}$ gemacht, z.B. [AE06, Satz I.9.4],
- **Bemerkung.** Der Begriff des geordneten Körpers wird nicht vor der nächsten Vorlesung verwendet.
- **Literatur.** Teile von [AE06, Sektion I.8] (Körper und [AE06, Bemerkungen I.8.7]), [AE06, Sektion I.9] von [AE06, Theorem I.9.2] bis einschliesslich [AE06, Satz I.9.4].

▷ Elfte Vorlesung “Die reellen Zahlen I”.

- **Vortragender.** Krzysztof Putyra.
- **Datum.** 03.Dez.2018, 10:15–12:00.

- **Keywords.** Geordnete Körper, Dedekind Schnitte.
- **Ziele.** Zuerst wird ein geordneter Köerper definiert, und einige grundlegende Eigenschaften dieser Körper gezeigt [AE06, Sätze I.8.9 udn I.8.10 und Korollar I.8.11]. Erstes Beispiel ist $\mathbb{Q}$ [AE06, Theorem I.9.5]. Dann kommt das Vollständigkeitsaxiom [AE06, Satz I.10.1] und das $\mathbb{Q}$ dieses nicht erfüllt [AE06, Beispiel I.10.3]. Dann kommt die Konstruktion von $\mathbb{R}$ mittels Dedekindschen Schnitten [AE06, Theorem I.10.4]. (Der Beweis ist lang.) Zum Schluss Infimum und Supremum [AE06, Satz I.10.5].
- **Bemerkung.** Zu diesem Termin gibt es einen Ersatzsprecher.
- **Literatur.** Teile von [AE06, Sektion I.8] und [AE06, Sektion I.9] (geordnete Körper und [AE06, Theorem I.9.5]), [AE06, Sektion I.10] bis einschliesslich [AE06, Satz I.10.5].

▷ Zwölfte Vorlesung “Die reellen Zahlen II”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 10.Dez.2018, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Satz von Archimedes, Dichtheit, Intervalle.
- **Ziele.** Angefangen wird mit dem Satz von Archimedes [AE06, Satz I.10.6], dann wird die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ besprochen [AE06, Sätze I.10.7 und I.10.11]. Dann werden Intervalle eingeführt und einige Grundbegriffe für diese. Zum Schluss kommt die Intervallschachtelung [AE06, Aufgabe I.10.15].
- **Bemerkung.** Der Satz von Archimedes wird auch manchmal als archimedische Axiom bezeichnet.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.10] von [AE06, Satz I.10.6] bis einschliesslich [AE06, Satz I.10.5]. (Wurzeln werden ausgelassen, bzw. kommen ganz zum Schluss.)

▷ Dreizehnte Vorlesung “Nicht ganz so naive Mengenlehre”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 17.Dez.2018, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Formale Mengenlehre, z.B. Russelsche Antimonie, Auswahlaxiom, Wohlordnungssatz, Lemma von Zorn.
- **Ziele.** Zuerst die Russelsche Antimonie [J03, §I.1.11]. Dann die Definitionen von Zermelo–Fraenkel [J03, §I.1.1 bis §I.1.8]. Dann das Auswahlaxiom [J03, §I.1.9] und [J03, Anfang von Sektion I.5], dann das Wohlordnungsprinzip [J03, Theorem I.5.1] und zum Schluss das Lemma von Zorn [J03, Theorem I.5.4]. Beide sind äquivalent zum Auswahlaxiom, aber das wird nicht gezeigt.
- **Bemerkung.** Der Stoff ist schwer verdaulich, aber es ist wichtig zu wissen, dass man auch Mengen formal einführen kann.
- **Literatur.** [J03, Sektion I.1], allerdings weniger formal. Teile von [J03, Sektion I.5] (Auswahlaxiom und [J03, Theoreme I.5.1 und I.5.4]).

## References

[AE06] H. Amann; J. Escher. *Analysis. I.* Dritte Auflage. Grundstudium Mathematik. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[J03] T. Jech. *Set theory.* The third millennium edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

D.T.: Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, Campus Irchel, Office Y27J32, CH-8057 Zürich, Switzerland, www.dtubbenhauer.com

*Email address*: daniel.tubbenhauer@math.uzh.ch