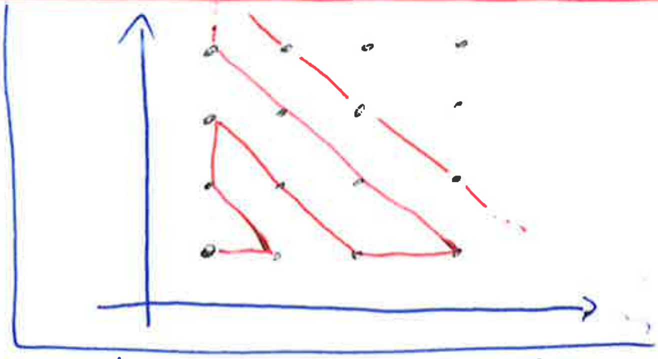
Vorlesung 8, 12. Nov. 2018

"Naive Mengenlehre IV"



Was wir noch nicht wirklich behandelt haben ist Unendlichkeit von Mengen. Das ist das Ziel der Vorlesung.

Lemma 8.1 Es sei $\varphi : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{1:1} \{1, \dots, m\}$ eine Bijektion. Dann ist $m = n$.

Schreibweise für bijektiv

Beweis: Wegen Surjektivität folgt, dass $m \leq n$ gilt, und wegen Injektivität folgt, dass $n \leq m$ gilt. $\square$

Eine Menge $X \neq \emptyset$ heißt endlich, falls $\exists\, \varphi : X \xrightarrow{1:1} \{1, \dots, n\}$ bijektiv, ansonsten heißt X unendlich. $\emptyset$ ist auch endlich.

Die (naive) Anzahl der Elemente von X ist

$$\cancel{\mathrm{Anz}(X)}\ |X| = \begin{cases} 0, & \text{falls } X = \emptyset \\ n \in \mathbb{N}, & \text{falls } \exists\, \varphi : X \xrightarrow{1:1} \{1, \dots, n\} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen Lemma 8.1 ist $|X|$ wohldefiniert.

0-elementig

X heißt n-elementig, falls $|X| = n \in \mathbb{N}$ oder $X = \emptyset$

Beispiel 8.2 Die Menge $\{1, 2, 3\}$ ist 3-elementig, genauso wie die Menge $\{a, b, c\}$.

Eine Permutation einer endlichen Menge X ist eine Bijektion $\sigma : X \xrightarrow{1:1} X$, deren Menge ist $S(X)$.

Proposition 8.3

Für eine n-elementige Menge X gilt $|S(X)| = n!$

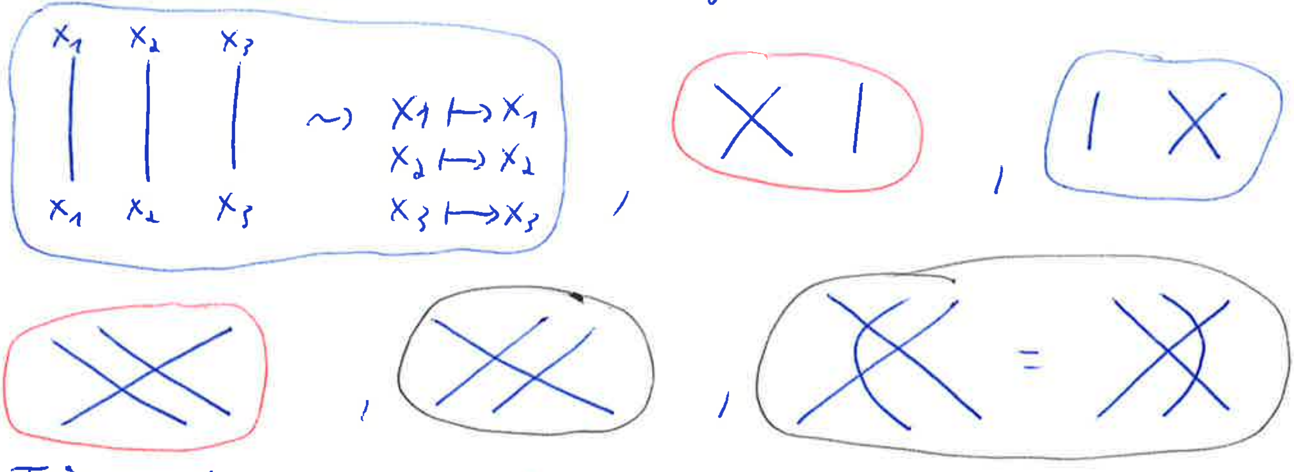
Beweis Durch Induktion.

(IA): $n=0$ ist klar, da es genau eine Abbildung $\emptyset \to \emptyset$ gibt.

(IS): Sei die Behauptung also wahr für n.

Sei $X = \{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ $n+1$-elementig. Dann gibt es nach Induktion genau $n!$ Bijektion $\sigma : X \xrightarrow{1:1} X$ mit $\sigma(x_{n+1}) = x_{n+1}$.
~~Für $\sigma(x_{n+1}) \neq x_{n+1}$ gibt es dann $n!$ weitere Möglichkeiten~~ Anzahl für jedes andere x_l $(1 \leq l < n+1)$, also gibt es $n!(n+1)$ Permutationen. $\square$

Beispiel 8.4 Bildlich für $n=3$



Fixiere ~~A~~ $x_1 \mapsto x_1$, $x_2 \mapsto x_1$, $x_3 \mapsto x_1$

Zwei Mengen X, Y heißen gleichmächtig, falls $\exists \varphi : X \xrightarrow{1:1} Y$, und X heißt abzählbar unendlich, wenn $\exists \varphi : X \xrightarrow{1:1} \mathbb{N}_0$

Beispiel 8.5 $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig (und beide abzählbar unendlich). Hier ist eine Bijektion:

$$V : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n+1$$

Eine Menge X heißt **abzählbar**, wenn X endlich ist oder unendlich abzählbar, sonst heißt X **überabzählbar**. Frage: Gibt es überabzählbare Mengen?

abzählbar unendlich (Wortdreher)

Theorem (Cantor) 8.6

Es gibt keine Surjektion $X \longrightarrow P(X)$.
(Und damit sind X und $P(X)$ niemals gleichmächtig.)

Beweis: Wegen $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ist dies klar für $X = \emptyset$.
Sei also $X \neq \emptyset$ und betrachte für eine beliebige Abbildung $\varphi : X \longrightarrow P(X)$ die Teilmenge

$$A = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\} \subset X.$$

Angenommen $\exists\, y \in X$ mit $\varphi(y) = A$. Dann:
$y \in A \Rightarrow y \notin \varphi(y) = A$ (Widerspruch) oder
$y \notin A \Rightarrow y \in \varphi(y) = A$ (Widerspruch). Somit hat A kein Urbild. $\square$

Beispiel 8.7 Cantors Theorem liefert sofort eine überabzählbare Menge, nämlich $P(\mathbb{N}_0)$.

Proposition 8.8

Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist selbst abzählbar.

Beispiel 8.9 Alle Teilmengen von $\mathbb{N}_0$, z.B. die geraden Zahlen, sind abzählbar.

Beweis: Die Aussage ist klar für X endlich, also können wir annehmen, dass X abzählbar unendlich ist. Dann können wir aber sogar annehmen, dass $X = \mathbb{N}_0$ gilt, wo die Aussage für A endlich klar ist.
Sei also $A \subset \mathbb{N}_0$ ~~abzählbar~~ nicht endlich.

Definiere rekursiv $\alpha : \mathbb{N}_0 \longrightarrow A$ durch

$$\alpha(0) = \min(A), \quad \alpha(n+1) = \min\{m \in A \mid m > \alpha(n)\}$$

Existiert nach dem Wohlordnungsprinzip

Es gilt nun $\alpha(n+1) > \alpha(n)$ und $\alpha(n+1) \geq \alpha(n) + 1$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.
Deswegen liefert Induktion, dass sogar $\alpha(n+k) > \alpha(n)$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt. Also ist α injektiv.

Dem Leser überlassen.

Per Induktion zeige ich:
Behauptung $\alpha(m) \geq m \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$
Beweis: (IA) $m = 0$ ist klar. (IS) ~~Ek~~ Ausgelassen

(OD) Angenommen $\alpha(m) \geq m$ und fixiere $n_0 \in A$.
Sei $B = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid \alpha(m) \geq n_0\}$ welche wegen $\alpha(m) \geq m$ nicht leer ist. Setze $m_0 = \min(B)$. Gilt $m_0 = 0$, so folgt

$$\min(A) = \alpha(0) \geq n_0 \geq \min(A)$$

surjektiv

also $n_0 = \alpha(0)$. Für $n_0 > \min(A)$ gilt

$$\alpha(m_0 - 1) < n_0 \leq \alpha(m_0) \Rightarrow \alpha(m_0) = n_0$$

$\square$

~~Beispiel 8.9 (2) Cantors Schema~~

Tippfehler: "Wie in" nicht "Wegen".

Wegen Proposition 8.8 kann man bei Aussagen über abzählbar unendliche Mengen immer annehmen, dass sie $\mathbb{N}_0$ sind.

Beispiel 8.10 Cantors Schema

$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist abzählbar:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & (0,3) & (1,3) & (2,3) & (3,3) & \cdots \\
\mathbb{N}_0 & (0,2) & (1,2) & (2,2) & (3,2) & \cdots \\
 & (0,1) & (1,1) & (2,1) & (3,1) & \cdots \\
 & (0,0) & (1,0) & (2,0) & (3,0) & \cdots \\
\hline
 & & & \mathbb{N}_0 & &
\end{array}
$$

Dasselbe gilt für $\mathbb{N}_0^n$!

Proposition 8.11

Jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist selbst abzählbar.

Beweis: ~~Benutze~~ Ausgelassen. (Benutze Cantors Schema)

Proposition 8.12

Jedes endliche Produkt abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Beweis: Ausgelassen. (Benutze Cantors Schema)

Beispiel 8.13 Endliche Produkte endlicher Mengen

sind nicht gleichmächtig. Zum Beispiel für $X = \{1,2\}$ hat $X \times X$ die Elemente

$$
\begin{array}{c|cc}
X & (1,2) & (2,2) \\
 & (1,1) & (2,1) \\
\hline
 & & X
\end{array}
$$

, also

~~Anz~~ $|X| = 2$

$|X \times X| = 4 = 2^2$

Allgemeiner: Sei $|X_k| = x_k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\left|\prod_{k=0}^{n} X_k\right| = |X_0| \cdot \ldots \cdot |X_k| = \prod_{k=0}^{n} |X_k| \geq |X_k| \ \forall k$$

Aber $\prod_{k=0}^{n} \mathbb{N}_0$ ist gleichmächtig ("gleich groß") zu $\mathbb{N}_0$, wie Cantors Schema zeigt.

Zur Erinnerung: $X^Y = \mathrm{Abb}(Y, X)$

Im allgemeinen sind "unendliche Produkte" endliche Mengen nicht abzählbar.

"Unendliches Produkt" ist per Definition X^Y für unendliches Y wie folgendes Lemma sicherstellt:

Lemma 8.14 Es gilt für jedes ~~Menge~~ $n \in \mathbb{N}_0$ eine Bijektion

$$\boxed{X \neq \emptyset} \qquad \varphi : \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n} = X^n \xrightarrow{1:1} X^n = \begin{cases} \mathrm{Abb}(\{1, \ldots, n\}, X), & n \neq 0 \\ \emptyset, & n = 0 \end{cases}.$$

Beweis: Der Fall $n = 0$ ist klar. Betrachte nun folgende Abbildungen:

$$\varphi : \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n} \longrightarrow \mathrm{Abb}(\{1, \ldots, n\}, X)$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \left\{ \psi \in \mathrm{Abb}(\{1, \ldots, n\}, X) \;\middle|\; \psi(k) = x_k \right.$$

$$\psi : \mathrm{Abb}(\{1, \ldots, n\}, X) \longrightarrow X \times \ldots \times X$$

$$\psi \longmapsto (\psi(1), \ldots, \psi(n))$$

Dann gilt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{X \times \ldots \times X}$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Abb}(\{1, \ldots, n\}, X)}$.

Zur Erinnerung: $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$ $\Rightarrow$ beide bijektiv

Proposition 8.15 Es gibt eine Bijektion $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0} \xrightarrow{1:1} \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$. Insbesondere ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ nicht abzählbar.

Beweis: Definiere

$$\begin{aligned} \varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \\ \psi &\longmapsto A = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \psi(n) = 1\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) &\longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}_0} \\ A &\longmapsto \left(\psi : \mathbb{N}_0 \to \{0,1\},\ \psi(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \notin A, \\ 1, & \text{falls } n \in A. \end{cases}\right) \end{aligned}$$

Dann gilt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}}$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)}$, also ist φ eine Bijektion. $\square$