Vorlesung 6, 29. Okt. 2018

"Die natürlichen Zahlen II"

Wir haben schon gesehen, dass PA2 sehr wichtig ist. Dies führt uns zum Begriff der <u>mathematischen Induktion</u> (später).

$3^{k+1}-1$ ist durch 2 teilbar:

$$3^{k+1}-1 = 3\cdot 3^k - 1 = \underbrace{2\cdot 3^k}_{\checkmark} + \underbrace{(3^k-1)}_{\text{per Induktion}}$$

Proposition 6.1

$\mathbb{N}_0$ ist nach unten wohlgeordnet, d.h. $A \subset \mathbb{N}_0$, $A \neq \emptyset$ besitzt ein Minimum.

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{N}_0$ nicht leer. Setze

$$B = \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ ist eine } \cancel{\text{Schranke}} \text{ untere Schranke von } A \}$$

Es ist $0 \in B$. Angenommen A besitzt kein Minimum und sei $n \in B$. Dann $n \notin A$, und

$$\left.\begin{array}{l} a \geq n \\ a \neq n \end{array}\right\} a > n \quad \forall a \in A \quad \text{zeigt} \quad a \geq n+1 \quad \forall a \in A.$$

Also ist $n+1 \in B \overset{PA2}{\Longrightarrow} B = \mathbb{N}_0$. Also muss A leer sein, da $A \cap B = \emptyset$ ist unter der Annahme, dass A kein Minimum hat. Widerspruch. $\boxed{\text{q}}$

Beispiel 6.2 Endliche Teilmengen von $\mathbb{N}_0$ haben klarerweise ein Minimum, aber auch $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid 2 \nmid n\}$ (die <u>ungeraden</u> Zahlen) hat 1 als Minimum.

Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl, falls $p \geq 2$ und $n \mid p \Rightarrow (n = 1) \vee (n = p)$.

Proposition 6.3 Jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \neq 0,1$ besitzt eine Primfaktorzerlegung (PFZ), d.h. $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ mit Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$. Diese ist eindeutig bis auf Reihenfolge.

Beweis: i) Angenommen die Menge

$$A = \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid n \neq 0,1,\ n \text{ besitzt keine PFZ} \}$$

ist nicht leer. Dann $\exists\, a \in A$ minimal, nach Proposition 5.1. Insbesondere ist a selbst keine Primzahl, also $\exists\, b, c \in \mathbb{N}$ mit $b, c \neq 1$ und $a = bc$. Aber dann gilt $b < a$ und $c < a$

$\Rightarrow \exists\, p_1, \ldots, p_k,\ p_1', \ldots, p_{k'}'$ mit $b = \underbrace{p_1 \cdots p_k}_{\boxed{\text{PFZ}}}$ und $c = \underbrace{p_1' \cdots p_{k'}'}_{\boxed{\text{PFZ}}} \Rightarrow a = p_1 \cdots p_k p_1' \cdots p_{k'}'$ ist eine PFZ von a. Widerspruch, also ist $A = \emptyset$.

---

ii) Angenommen die Menge

$$B = \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid n \neq 0,1,\ n \text{ besitzt mehrere PFZ} \}$$

ist nicht leer. Dann $\exists\, b \in B$ minimal mit

$$b = \underbrace{p_1 \cdots p_k}_{\boxed{\text{PFZ}}} = \underbrace{p_1' \cdots p_{k'}'}_{\boxed{\text{PFZ}}}$$

Angenommen $p_i = p_j'$ für irgendwelche i,j.
Dann kann man kürzen und erhält b' mit $b' < b$ und $b' \in B$. Widerspruch zur Minimalität.
Also können wir annehmen, dass $p_1 \leq \dots \leq p_k$, $p_1' \leq \dots \leq p_l'$ und $p_1 < p_1'$ gilt. Setze

$$q = p_1 p_2' \cdots p_l'$$

Dann gilt $p_1 | q$ und $p_1 | b \Rightarrow p_1 | (b-q)$ und $b-q \in \mathbb{N}$
Also existiert eine eindeutige PFZ

$$b-q = \underbrace{p_1 r_1 \cdots r_e}_{\boxed{PFZ}} = (p_1' - p_1) p_2' \cdots p_l'$$

Wenn man jetzt als eine PFZ von $p_1' - p_1$ wählt, dann erhält man eine weitere PFZ von $b-q$. Also ~~kond~~ $b - q \in B$; Widerspruch zur Minimalität.

Das führt uns zum Begriff der Induktion:
Um eine Aussage $E(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu beweisen geht man wie folgt vor:

a) Induktionsanfang (IA) Prüfe $E(0)$ ist wahr.

b) Induktionsschluss (IS)

   α) Nehme an $E(n)$ ist wahr.

   β) Zeige dass daraus $E(n+1)$ folgt.

Proposition (Induktionsprinzip) 6.4
Induktion liefert, dass $E(n)$ wahr ist für $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Das folgt aus PA2 $\boxed{z}$

Proposition 6.5 (Induktionsprinzip)
Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und sei für alle $n \geq n_0$ eine Aussage $E(n)$ so gegeben, dass:

a) $E(n_0)$ ist wahr.

b) $\forall n \geq n_0$ gilt: $E(n)$ wahr $\Rightarrow$ $E(n+1)$ wahr.

Dann ist $E(n)$ für alle ~~$n \in \mathbb{N}$~~ $n \geq n_0$ wahr.

Beweis: Setze $N = \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid E(n+n_0) \text{ ist wahr} \}$.
Dann gilt $0 \in N$ wegen a) und $n \in N \Rightarrow n+1 \in N$ wegen b). Also $N = \mathbb{N}_0$ wegen PA2 $\boxed{z}$

Schreibweise: $m^n = \underbrace{m \cdot m \cdots m}_{n}$ für $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$

Beispiel 6.6 Behauptung: $3^k - 1$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$ durch 2 teilbar.

Beweis: Durch Induktion.

(IA): $k = 1$, dann ist $3^1 - 1 = 2$ durch 2 teilbar.

(IS) Sei die Behauptung wahr für ein $n \in \mathbb{N}$ (*)

Dann ist $3^{n+1} - 1 = 3(3^n) - 1$

$= (2+1)3^n - 1 = \underbrace{(2 \cdot 3^n)}_{\text{durch 2 teilbar}} + \underbrace{(3^n - 1)}_{\text{durch 2 teilbar wegen (*)}}$

$\Rightarrow 3^{n+1} - 1$ ist durch 2 teilbar $\boxed{}$

Beispiel 6.7 Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$.

Beweis: Durch Induktion.

(IA): $n = 1$, dann $1 = 1^2 = 1$.

(IS): Sei die Behauptung wahr für ein $n \in \mathbb{N}$. (*)

Dann ist $\underbrace{1 + 3 + \dots + (2n-1)}_{= n^2 \text{ wegen } (*)} + (2n+1)$

$= n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$ $\boxed{}$

Beispiel 6.8 Behauptung: $2^n > n^2$ für alle $n \geq 5$.

Beweis: Durch Induktion.

(IA): $n = 5$, dann ist $32 = 2^5 > 5^2 = 25$.

(IS): Sei die Behauptung wahr für ein $n \geq 5$. (*)

Dann ist

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\text{wegen } (*)}{>} 2 \cdot n^2 = n^2 + n \cdot n$$

Weiter ist $n \cdot n \geq 5n > 2n+1$, da $n \geq 5$ ist.
Also folgt:

$$2^{n+1} > n^2 + n \cdot n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \qquad \boxed{z}$$

<u>Proposition 6.9</u> Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass für alle $n \geq n_0$ ~~$\mathfrak{?}$~~ $E(n)$ eine Aussage ~~und~~ ist so, dass

a) $E(n_0)$ ist wahr.

b) Für alle $n \geq n_0$: ~~$\mathfrak{?}$~~ $E(k)$ ist wahr für $n_0 \leq k \leq n$ $\Rightarrow E(n+1)$ ist wahr.

Dann ist $E(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr.

<u>Beweis</u>: Betrachte die Menge

$$N = \{ n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq n_0 \text{ und } E(n) \text{ falsch} \}.$$

Angenommen $N \neq \emptyset$. Dann existiert nach dem Wohlordnungsprinzip ein Minimum von N, nennen wir es m. Wegen a) gilt Tippfehler: m not = n_0 $m \neq n$, also $m > n_0$.
Es folgt aus der Definition von m, dass $E(k)$ wahr ist für alle $n_0 \leq k \leq n$ wobei $n+1 = m$.
Aus (b) folgt dann aber, dass $E(n+1)$ wahr ist. Widerspruch. $\boxed{z}$

Diese Version des Induktionsprinzips stellt sicher, dass wir alle Schritte zwischen n_0 und n benutzen können, um $E(n+1)$ zu zeigen.

Beispiel 6.10 a) "Behauptung": Alle ungeraden Zahlen sind durch 2 teilbar.

"Beweis": Sei n die n^{te} ungerade Zahl. Durch Induktion sehen wir, dass n durch 2 teilbar ist. Dann ist also auch die $(n+1)^{te}$ ungerade Zahl $n+2$ durch 2 teilbar. $\boxed{\text{z}}$

Wo liegt der Fehler?

Der Induktionsanfang wurde vergessen: In der Tat ist $n=1$ nicht durch 2 teilbar, genauso wie ~~wieder~~ jeder andere mögliche Startpunkt.