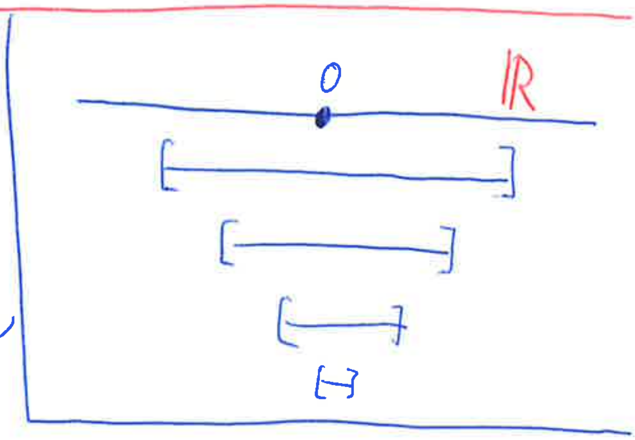
Vorlesung 12, 10. Dez. 2018

Die reellen Zahlen II

Der Punkt ist, dass die reellen Zahlen keine "Lücke" haben, wie wir unten sehen werden.



Proposition 12.1 (Satz von Archimedes)

$\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ ist nicht nach oben beschränkt, d. h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > x$.

Beweis: Für $x < 0$ oder $x = 0$ ist die Aussage richtig. Sei also $x > 0$ und betrachte $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$. Dann ist $0 \in A$, also $A \neq \emptyset$. Weiter ist A nach oben beschränkt (durch x). Tippfehler: Für...existiert...
Sei $s = \sup(A) \in \mathbb{R}$ und es existiert $a \in A$ mit $s - 1/2 < a$. Dann folgt für $n = a + 1$ dass $n > s$. Weiter ist $n \notin A$ wegen $n > s$, also $n > x$. $\square$

Proposition 12.2

a) Gilt $0 \leq a \leq 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, so folgt $a = 0$.
b) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < a$.

---

b) ist nur eine Umformulierung von a), also Wäre $0 < a < 1/n$ für $\forall n \in \mathbb{N}$ dann folgt $n \leq 1/a$. Widerspruch zu
für alle n in N
Satz von Archimedes. $\square$

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ approximieren die reellen beliebig gut. Formal nennt man das Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ und ist wie folgt:

Proposition 12.3

Zu $a<b \in \mathbb{R}$ gibt es $r \in \mathbb{Q}$ mit $a<r<b$.

Beweis: Schritt 1: Wegen $a<b$ gilt $b-a>0$. Also $\exists\, n$ mit $n > 1/(b-a) > 0$ und somit $nb > na+1$. $(\boxtimes)$

Schritt 2: Es gibt nun aber $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1 > na$ und $m_2 > -na$, d.h. $-m_2 < na < m_1$.
Somit gibt es $m \in \mathbb{Z}$ mit $m-1 \leq na < m$.
Zusammen mit $(\boxtimes)$ folgt

$$na < m \leq 1+na < nb.$$

Setze $r = m/n \in \mathbb{Q}$ und es folgt $a<r<b$. $\boxtimes$

Das heißt $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$. ("Zwischen zwei reellen Zahlen liegt immer eine rationale").

Die irrationalen Zahlen $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ liegen auch dicht:

Proposition 12.4

Zu $a<b \in \mathbb{R}$ gibt es $\xi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $a<\xi<b$.

Beweis: Schritt 1: Wir behaupten, dass es eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x>0$ so gibt, dass $x^2=2$. Wir notieren $x=\sqrt{2}$.

In der Tat ist $R = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \text{ und } x > 0\}$ eine Teilmenge von $P(\mathbb{Q})$ welche die Axiome einer reellen Zahl erfüllt.

p/q reduziert

<u>Schritt 2</u>: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Angenommen $\sqrt{2} = p/q \in \mathbb{Q}$, dann gilt $2q^2 = p^2$. Daraus folgt aber, dass $p = 2\ell$ für ein $\ell \in \mathbb{Z}$, was wiederum $q = 2\ell'$ impliziert. Widerspruch.

<u>Schritt 3</u>: Finde rationale Zahlen $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ mit $a < r_1 < b$ und $r_1 < r_2 < b$. Setze $\xi = r_1 + (r_2 - r_1)/\sqrt{2}$ folgt dann $a < \xi < b$.
Wegen $\boxed{\text{Schritt 2}}$ ist ξ irrational

Ein Intervall I ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit:

Tippfehler: es existiert z in I mit ....

$$(x, y \in I,\ x < y) \Rightarrow (z \in I \text{ für } x < z < y)$$

<u>Beispiel 12.5</u> Seien $a < b \in \mathbb{R}$. "Intervalle haben keine Löcher"

$[\text{———}] = [a,b] = \{z \mid a \leq z \leq b\}$ genannt abgeschlossen

$(\text{———}] = (a,b] = \{z \mid a < z \leq b\}$ weder offen noch geschlossen

$[\text{———}) = [a,b) = \{z \mid a \leq z < b\}$

$(\text{———}) = (a,b) = \{z \mid a < z < b\}$ genannt offen

Aber auch $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $-\mathbb{R}_{\geq 0}$ sind Intervalle. Kein Intervall:

$\mathbb{R} - \{0\}$

Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt **offen**, falls $\inf(I) \notin I$ und $\sup(I) \notin I$, und **abgeschlossen**, falls $\inf(I) \in I$ und $\sup(I) \in I$. I heißt **beschränkt**, wenn $\inf(I) \in \mathbb{R}$ und $\sup(I) \in \mathbb{R}$; in diesem Fall ist $|I| = \sup(I) - \inf(I) \in \mathbb{R}$ die **Länge** von I.

Beispiel 12.6 $I = \{a\} = [a,a]$ ist ein abgeschlossenes Intervall der Länge 0, genauso wie $(a,a) = \emptyset$. $\emptyset$ ist aber auch offen.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n \neq \emptyset$ ein beschränktes Intervall, welches abgeschlossen ist.
Die Familie $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ heißt **Intervallschachtelung** (IVS) falls:

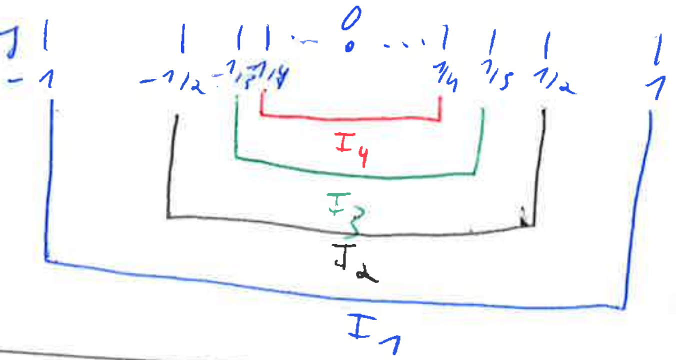
i) $I_{n+1} \subset I_n$

ii) Für alle $\varepsilon > 0$ $\exists I_n$ mit $|I_n| < \varepsilon$.

Eine IVS heißt rational, falls $\sup(I_n), \inf(I_n) \in \mathbb{Q}$ für alle n

---

Beispiel 12.7 Die Familie $\{[-1/n, 1/n] = I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Intervallschachtelung.
Im Schnitt liegt exakt die Null.



Theorem 12.8 (Intervallschachtelung)

a) Zu jeder IVS $\{I_n\}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_n I_n$.

b) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine rationale IVS mit $\{x\} = \bigcap_n I_n$

Theorem 12.8 sagt, dass rationale IVS und reelle Zahlen "dasselbe sind". Das gibt eine alternative Konstruktion der reellen Zahlen.

Beweis: a) Schritt 1: Eindeutigkeit

Seien $x, x' \in \bigcap_n I_n$ und sei $I_n = [a_n, b_n]$.

Dann gilt $a_n \le x \le b_n$ und $a_n \le x' \le b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Angenommen $x < x'$ $\rightsquigarrow$ ~~Finde ε mit $x \le \ldots x'$ und~~

setze $\varepsilon = x' - x$. Dann ist $\varepsilon < |I_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

denn $\underbrace{a_n \le \underbrace{x < x'}_{\varepsilon} \le b_n}_{|I_n|}$. Widerspruch.

Schritt 2: Existenz

Wegen $I_{n+1} \subset I_n$ folgt, dass $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ nach oben beschränkt ist. Also ist $\sup(A) \in A$.

Da jedes b_n wegen $I_{n+1} \subset I_n$ eine obere Schranke von A ist folgt $\sup(A) \le b_n \; \forall n \Rightarrow \sup(A) \ge a_n$ und $\sup(A) \le b_n \; \forall n \Rightarrow \sup(A) \in I_n \; \forall n$.

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le \sup(A) \le \ldots \le b_2 \le b_1 \le b_0$$

---

b) Schritt 1: ~~Wähle ein~~ betrachte für $n \in \mathbb{N}$ das Intervall $\tilde{I}_n = [x - 1/n, x + 1/n]$.

Das hat noch keine rationalen Endpunkte falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist.

Deswegen finde $p_n \in \mathbb{Q}$ und $q_n \in \mathbb{Q}_{>0}$, dass
$x - 1/n \leq p_n \leq x - 1/{n+1}$ und $x + 1/{n+1} \leq q_n \leq x + 1/n$
gilt. Setze $I_n = [p_n, q_n] \neq \emptyset$, welches ein Intervall gilt, denn $p_n < x < q_n$.

Schritt 2: Per Konstruktion ist $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $x \in \bigcap_n I_n$.

Schritt 3: $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Intervallschachtelung, denn $I_{n+1} \subset I_n$, per Konstruktion.

Weiter gilt $|I_n| = \cancel{p_n}\, q_n - p_n \leq 2/n$.

Schritt 4: Es gilt $\{x\} = \bigcap_n I_n$, denn ~~das~~ wir können wegen Schritt 2 den Schritt 1 in a) verwenden. $\boxed{\text{E}}$

Zum Abschluss noch Wurzeln:

Proposition 12.9

a) Zu $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x^n = a$. (Genannt n-te Wurzel)

b) Ist n ungerade, so hat $x^n = a$ genau eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Beweis: a) Schritt 1: Eindeutigkeit

Für $x^n = y^n$ und $y < x$ folgt $x^n - y^n = 0$ und $x - y > 0$. Aber nach Binomische Formel:

$$0 = (x^n - y^n) = \underbrace{(x-y)}_{>0} \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-j}}_{>0} > 0$$

Widerspruch

Schritt 2: Existenz folgt durch Betrachte von $A = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid x^n \leq a\}$. Nehme sup(A) als n-te Wurzel

Details siehe [AE06, Satz 10.9]

b) Wegen a) und $x < 0 \Rightarrow x^n < 0$ für n reicht es ~~die Eindeutigkeit~~ für ungerade ~~beweisen~~ den Fall $a < 0$ zu betrachten.

Ist $a < 0$, dann $\exists\, y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $y^n = -a$ durch a).

Setze $x = -y$ und die Behauptung folgt. $\square$