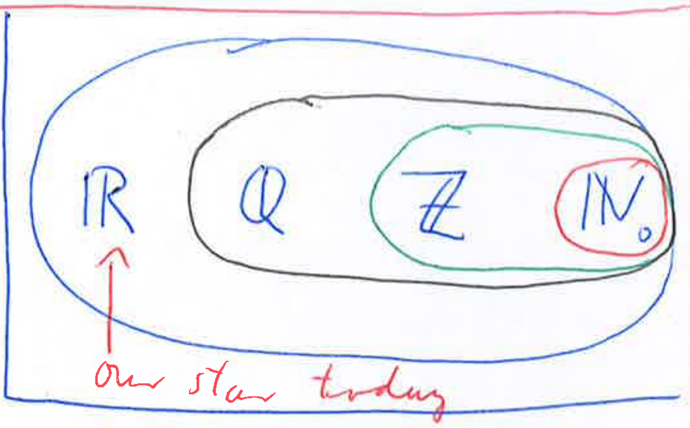
Vorlesung 11, 03. Dez. 2018

"Die reellen Zahlen I"



Bisher war alles rein algebraisch $\mathbb{N}_0 \rightsquigarrow \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$. Um weiter zu gehen, braucht man ein extra "Axiom" wie wir sehen werden.

Def: Ein Körper K heißt angeordnet, falls:

- $(K, \leq)$ ist total geordnet
- $\boxed{x < y \Rightarrow x + z < y + z}$ $\quad \forall x, y, z \in K$ (☒)
- $\boxed{x, y > 0 \Rightarrow xy > 0}$ $\quad \forall x, y \in K, \; x, y > 0$

Tippfehler:

Beispiel 11.1 Später sehen wir, dass $\mathbb{Q}$ ~~total~~ angeordnet ist. Dabei ist $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' < a'b \Leftrightarrow a'b - ab' \in \mathbb{N}_0$

Proposition 11.2 (Rechenregeln)

Seien $x, y, a, b \in K$. Dann gilt für K angeordnet:

a) $x > y \Leftrightarrow x - y > 0$.

b) $x + a > y + b$ falls $x > y$ und $a > b$.

c) $ax > ay$, falls $a > 0$ und $x > y$.

d) Aus $x > 0$ (bzw. $x < 0$) folgt $-x < 0$ (bzw. $-x > 0$)

e) Sei $x > 0$. Dann ist $xy < 0$ (bzw. $xy > 0$) falls $y < 0$ (bzw. falls $y > 0$).

f) $ax < ay$ falls $a < 0$ und $x > y$

g) $x^2 = x\cdot x > 0$ für $x \in K^\times$. Insbesondere $1 > 0$.

h) Aus $x > 0$ folgt $x^{-1} > 0$.

i) Aus $x > y > 0$ folgen $\cancel{0} < x^{-1} < y^{-1}$ und $xy^{-1} > 1$.

Beweis: Nur i), alle andere sind ausgelassen.

Sei $x > y > 0$. Dann folgt $x - y > 0$ aus a) und $x^{-1} > 0$ und $y^{-1} > 0$ aus h). Deswegen gilt wegen (e)

$$0 < (x-y)x^{-1}y^{-1} = y^{-1} - x^{-1},$$

also $x^{-1} < y^{-1}$ sowie $0 < (x-y)y^{-1} = xy^{-1} - 1$, also $xy^{-1} > 1$

$\square$

Beispiel 11.3 $\mathbb{F}_2$ aus Beispiel 10.1 kann nicht angeordnet werden, denn $1 > 0$ (11.2 g) und 11.2 b) gilt $0 = 1 + 1 > 0$, also $0 \neq 0$.

Sei K angeordnet. Definiere Betrag $|\cdot|$ und Signum $\operatorname{sign}(\cdot)$

$$|\cdot| : K \to K \quad |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \quad ; \quad \operatorname{sign}(\cdot) : K \to K \quad \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Proposition 11.4 (Rechenregeln)

Sei K ein angeordneter Körper, $x, y, a \in K$ und $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$.

a) $x = |x| \operatorname{sign}(x)$, $|x| = x \cdot \operatorname{sign}(x)$

b) $|x| = |-x|$, $x \leq |x|$

c) $|xy| = |x||y|$

d) $|x| \geq 0$ und $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

e) $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$

f) Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x|+|y|$ $\boxed{\Delta\text{-Ungl.}}$

Beweis: Exemplarisch f), die anderen sind ausgelassen.

Für $x+y \geq 0$ folgt aus b), dass
$|x+y| = x+y \leq |x|+|y|$. $\Big\}(\square)$

Für $x+y<0$ ist $-(x+y)>0$ und
$$|x+y| \overset{b)}{=} |-(x+y)| = |(-x)+(-y)| \overset{(\square)}{\leq} |-x|+|-y| \overset{b)}{=} |x|+|y|. \square$$

Proposition 11.5 (Reversed Δ-Ungleichung)

In jedem angeordneten Körper gilt
$$|x-y| \geq \big||x|-|y|\big| \quad x,y \in K$$

Beweis: Aus $x=(x-y)+y$ und Δ-Ungl. folgt
$|x| \leq |x-y|+|y|$, d.h. $|x|-|y| \leq |x-y|$.
Nun erhalten wir $|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$
durch Vertauschen von $x \Leftrightarrow y$ $\square$

Zur Erinnerung: $(\mathbb{Q}, \leq)$ mit $\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab'-a'b \in \mathbb{N}_0$

Theorem 11.6: $(\mathbb{Q}, \leq)$ ist ein angeordneter Körper.

Die Ordnung $\leq$ induziert die Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{N}_0$

Beweis: Ausgelassen.

Vorsicht: Teilmengen von $\mathbb{Q}$ besitzen i.A. kein Minimum

Das $\boxed{\text{Vollständigkeitsaxiom}}$: (VSA)

Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge. X erfüllt (VSA) wenn jede nach oben beschränkte Teilmenge $A \neq \emptyset$ ein Supremum besitzt.

Proposition 11.7 Sei $(X, \leq)$ total geordnet. Dann sind a), b), c) wie folgt äquivalent.

a) X erfüllt (VSA)

b) Jede nach unten beschränkte nicht leere Teilmenge besitzt ein Infimum.

c) Für $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$ mit $a \leq b$ für $(a,b) \in A \times B$ $\exists\, c \in X$ mit $a \leq c \leq b$. (Sandwichprinzip)

Beweis: [AE06, Satz 10.1] $\square$

Beispiel 11.8 $\mathbb{Q}$ erfüllt nicht das (VSA).

Betrachte dazu $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2,\ x > 0\}$ und $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \text{ und } x > 0\}$.

Es gilt $1 \in A$ und $2 \in B$. Aus $b - a = (b^2 - a^2)/(b+a) > 0$ folgt $(a,b) \in A \times B \Rightarrow a < b$.

Es gibt aber kein c mit $c \in \mathbb{Q}$ und $a \leq c \leq b$ $\forall (a,b) \in A \times B$, denn $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Siehe auch [AE06, Beispiel 10.3] für ein formales Argument.

Theorem 11.8 (Dedekind)

Es gibt einen kleinsten Körper $\mathbb{R} \supset \boxed{\mathbb{Q}} \supset \boxed{\mathbb{Z}} \supset \boxed{\mathbb{N}_0}$, welcher angeordnet und (VSA) erfüllt, der auf $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ die ursprüngliche Ordnung induziert. Dieser Körper ist bis auf ordnungserhaltende Isomorphie eindeutig und wird Körper der reellen Zahlen genannt.

Ordnungserhaltende Isomorphie: Ein Ringisomorphismus $\varphi : (K, \le) \to (K', \le')$ mit

$$\varphi(x) \le' \varphi(y), \text{ falls } x \le y$$

Beweis (Skizze): Schritt 1:

Definiere eine Teilmenge $\mathbb{R} \subset P(\mathbb{Q})$ durch

$$\mathbb{R} = \{ R \subset \mathbb{Q} \mid R \text{ erfüllt i), ii), iii)} \}$$

i) $R \neq \emptyset$, $R^c = \mathbb{Q} \setminus R \neq \emptyset$.

ii) $R^c = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < r \ \forall r \in R \}$.

iii) R besitzt kein Minimum.

Schritt 2:

Die Abbildung

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad r \mapsto \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > r \} \quad (\boxed{Z})$$

ist injektiv.

Schritt 3: Definiere Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (R, S) \mapsto R + S = \{ r + s \mid r \in R, s \in S \}$$

Diese ist assoziativ und kommutativ und

$0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ ist Nullelement.

Das +-Inverse ist $-R = \{x \in \mathbb{Q} \mid x + r > 0 \ \forall r \in R\}$.

Analog: $R \cdot R' = \{rr' \in \mathbb{Q} \mid r \in R, r' \in R'\}$ definiert eine Multiplikation, welche zusammen mit $+$ $\mathbb{R}$ die Struktur eines Körpers gibt.

Schritt 4: Für $R, R' \in \mathbb{R}$ setze

$$R \le R' \iff R \supset R'.$$

Dies induziert eine Ordnung auf $\mathbb{R}$, welche ~~wegen~~ total ist: Ist $R \neq R'$, dann gibt es ein $r \in R$ mit $r \in (R')^c$ oder ein $r' \in R'$ mit $r' \in R^c$. Im ersten Fall folgt $R' \subset R$ also $R' \geq R$, im zweiten $R' \supset R$, also $R' \le R$.

Schritt 5:
$$R \cdot R' = \begin{cases} -((-R) \cdot R'), & R < 0,\ R' \geq 0, \\ -(R \cdot (-R')), & R \geq 0,\ R' < 0, \\ (-R) \cdot (-R'), & R < 0,\ R' < 0. \end{cases}$$

Damit zeigt man das $\mathbb{R}$ angeordnet ist.

Schritt 6: Man checkt, dass alles mit den Strukturen auf $\mathbb{Q}$ unter $(\boxtimes)$ verträglich ist.

Schritt 7: Man zeigt, dass $\mathbb{R}$ das (VSA) erfüllt.

Sup ist S=\bigcup R für R\subset\mathbb{R}

Schritt 8: Man kann nachprüfen, dass $\mathbb{R}$ minimal ist und bis auf Isomorphie eindeutig. $\boxtimes$

Für $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ und nicht nach oben beschränkt setze $\sup(M) = \infty$. Analog $\inf(M) = -\infty$, falls $M \neq \emptyset$ nicht nach unten beschränkt ist. (*)

(Zur Erinnerung: Alle anderen Suprema und Infima existieren, da $\mathbb{R}$ das (VSA) erfüllt.)

Proposition 11.10

a) Für $A \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

α) $x < \sup(A) \Leftrightarrow \exists\, a \in A$ mit $x < a$.

β) $x > \inf(A) \Leftrightarrow \exists\, a \in A$ mit $x > a$.

b) Jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ hat ein Supremum und ein Infimum in $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Beweis: b) folgt aus Theorem 11.8 und der Definition (*).

a) α) Für $A = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei $A \neq \emptyset$.

~~Für~~ „$\Rightarrow$" Für $x < \sup(A)$ sei $a \leq x$ für $\forall a \in A$. Dann ist x eine Schranke von A, was nach Definition von $\sup(A)$ unmöglich ist.

„$\Leftarrow$" Es sei $a \in A$ mit $x < a$. Dann gilt $x < a \leq \sup(A)$.

β) geht analog. $\boxed{}$