AUFGABEN 9: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Eine nach unten (oben) gerichtete Wohlordnung auf einer Menge X ist eine totale Ordnung, bei der jede nichtleere Teilmenge von X ein kleinstes (größtes) Element bezüglich dieser Ordnung hat.

(a) Sei X eine endliche Menge. Finden Sie eine Wohlordnung auf X.

(b) Finden Sie eine Wohlordnung auf $X = \mathbb{N}_0$.

(c) Finden Sie eine Wohlordnung auf $X = \mathbb{Z}$.

(d) Finden Sie eine Wohlordnung auf $X = \mathbb{Z}^n$ für $n \geq 1$.

(e) Sei $X = \{1, 2\}$. Finden Sie eine Wohlordnung auf $\mathfrak{P}(X)$. (Errata: Vorsicht, die vorherige Formulierung war mit den Mitteln der Vorlesung nicht zu lösen.)

In den Fällen (a) bis (d) ist immer sowohl eine nach unten gerichtete, als auch eine nach oben gerichtete Wohlordnung anzugeben.

Aufgabe 2. Fixiere drei ganzen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Welche Bedingung muss c erfüllen, damit es ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ax + by = c$. Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$, d.h. eine Teilmenge so, dass $x + y \in n\mathbb{Z}$ und $z_1 x z_2 \in n\mathbb{Z}$ für alle $x, y \in n\mathbb{Z}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.

(b) $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$ ist genau dann eine Primzahl, falls es keine zwei Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, $z_1, z_2 \notin n\mathbb{Z}$ gibt so, dass $z_1 z_2 \in n\mathbb{Z}$.

(c) $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$ ist genau dann eine Primzahl, falls es für alle Zahlen $z_1 \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 \notin n\mathbb{Z}$ eine Zahl $z_2 \in \mathbb{Z}$ gibt so, dass $(z_1 z_2 - 1) \in n\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. Definiere rekursive eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch $f(1) = 1$, $f(2) = 1$ und $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$ für $n > 2$. Die Zahlen $f(n)$ heißen Fibonacci Zahlen. Wenden Sie auf zwei aufeinander folgende Fibonacci Zahlen den euklidischen Algorithmus an. Welche Gesetzmäßigkeit tritt auf? (Beschreiben Sie diese mit Beweis.)

Abgabe: 29.Nov.2018 in den Übungen. **Rückgabe**: 06.Dez.2018 in den Übungen.