AUFGABEN 13: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Schreibe Sie alle Axiome der ZF Mengenlehre auf, welche ihnen geheuer sind. (Das heißt, wiederholen Sie diese.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass Seperabilität impliziert, dass Teilmengen einer Menge tatsächlich Mengen sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Klasse aller Mengen keine Menge sein kann.
Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 2, und denken Sie an Russell.

Aufgabe 4. Anmerkung: Die Aufgabe ist schwer.

(a) Zeigen Sie, dass der Wohlodnungssatz das Auswahlaxiom impliziert.
Tipp: Ist $\mathfrak{A}$ eine Menge nicht leerer Mengen, so kann man die Vereinigungsmenge $\bigcup \mathfrak{A}$ wohlordnen. Finde Sie dann eine Auswahlfunktion.

(b) Zeigen Sie, dass das Lemma von Zorn den Wohlodnungssatz impliziert.
Tipp: Betrachten Sie die Menge $\mathfrak{W}(X)$ aller Teilmengen von X zusammen mit einer Wohlordnung, also Paare $(A, <_A)$ mit $A \subset X$ und $<_A$ eine Wohlordnung. $\mathfrak{W}(X)$ ist ein partiell geordnete Menge (es gelte $(A, <_A) < (B, <_B)$ per Definition, wenn $<_A$ durch die Einschränkung von $<_B$ entsteht und es gibt $b \in B$ so, dass $A = \{a \in B \mid a <_B b\}$) worauf Sie das Lemma von Zorn anweden können. Zeigen Sie dann, dass deswegen $(X, <_X) \in \mathfrak{W}(X)$ gelten muss.

(c) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom das Lemma von Zorn impliziert.
Tipp: Nur für Mutige.

Keine Abgabe.