AUFGABEN 12: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}$ der kleinster Körper ist, der in $\mathbb{R}$ enthalten ist. Das heißt, für jeden Körper $K \subset \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{Q} \subset K$.

Aufgabe 2. Seien $A, B \neq \emptyset$ Teilmengen von $\mathbb{R}_{>0}$. Definiere $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ und $A \cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sup(A \cdot B) = \sup(A)\sup(B)$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $\inf(A \cdot B) = \inf(A)\inf(B)$ gilt.

(e) Entscheiden Sie (mit Beweis) ob (a)-(d) auch noch gelten, falls $A, B \neq \emptyset$ Teilmengen von $\mathbb{R}$ anstelle von $\mathbb{R}_{>0}$ sind.

Aufgabe 3. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge so, dass $\inf(A) > 0$ gilt. Definiere $1/A = \{1/a \mid a \in A\}$. Zeigen Sie, dass $\sup(1/A) = 1/(\inf A)$ gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.

Abgabe: 17.Dez.2018 vor der Vorlesung. **Rückgabe**: 20.Dez.2018 in den Übungen.