AUFGABEN 10: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Zur Erinnerung: Eine nach unten (oben) gerichtete Wohlordnung auf einer Menge X ist eine totale Ordnung, bei der jede nichtleere Teilmenge von X ein kleinstes (größtes) Element bezüglich dieser Ordnung hat.

Sei X eine total geordnete Menge, welche nach unten und oben wohlgeornet ist. Zeigen Sie, dass X endlich ist.

Aufgabe 2. Geben Sie auf $\mathbb{Q}$ eine Ordnung an so, dass $\mathbb{Q}$ nach unten wohlgeordnet ist.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge. Definiere

$$\Delta\colon \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X),\ \Delta(A, B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$
$$\cap\colon \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X),\ \cap(A, B) = A \cap B.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}(X), \Delta, \cap)$ ein Ring mit Eins ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Für $f, g \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ definiere eine Addition $+$ und eine Multiplikation $*$ via

$$+\colon \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\ +(f, g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$*\colon \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\ *(f, g)(x) = \sum_{ab=x} f(a)g(b),$$

wobei die Summe über alle Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ läuft mit $ab = x$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +, *)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Abgabe: 03.Dez.2018 vor der Vorlesung. **Rückgabe**: 06.Dez.2018 in den Übungen.