

## AUFGABEN 12: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

**Aufgabe 1.** Beweisen Sie, dass  $\mathbb{Q}$  der kleinster Körper ist, der in  $\mathbb{R}$  enthalten ist. Das heißt, für jeden Körper  $K \subset \mathbb{R}$  gilt  $\mathbb{Q} \subset K$ .

**Aufgabe 2.** Seien  $A, B \neq \emptyset$  Teilmengen von  $\mathbb{R}_{>0}$ . Definiere  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$  und  $A \cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$  gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass  $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$  gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass  $\sup(A \cdot B) = \sup(A)\sup(B)$  gilt.
- (d) Zeigen Sie, dass  $\inf(A \cdot B) = \inf(A)\inf(B)$  gilt.
- (e) Entscheiden Sie (mit Beweis) ob (a)-(d) auch noch gelten, falls  $A, B \neq \emptyset$  Teilmengen von  $\mathbb{R}$  anstelle von  $\mathbb{R}_{>0}$  sind.

**Aufgabe 3.** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  eine Menge so, dass  $\inf(A) > 0$  gilt. Definiere  $1/A = \{1/a \mid a \in A\}$ . Zeigen Sie, dass  $\sup(1/A) = 1/(\inf A)$  gilt.

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}$  nicht abzählbar ist.

**Abgabe:** 16.Dez.2019 vor der Vorlesung. **Rückgabe:** 19.Dez.2019 in den Übungen.