Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 5

Uni Bonn, SS 2017

Aufgabe 1 (2pt)**.** Zeigen Sie, dass der Produktraum $\prod_{i\in[0,1]} \mathrm{Disc}(\{0,1\})$ kompakt, aber nicht sequentiell kompakt ist (Bemerkung 7.21).

Aufgabe 2 (9pt)**.** Sei X ein parakompakter Hausdorff-Raum, sei $f : S^{n-1} \to X$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass der Verkleberaum $X \cup_f D^n$ (Def. 6.30) selbst parakompakt Hausdorff ist. (Bsp. 8.6)

Hinweis: Betrachten Sie die Unterräume $D^n \backslash S^{n-1}$, $X \backslash f(S^{n-1})$ und $f(S^{n-1})$. Überlegen Sie sich erst, dass $f(S^{n-1}) \subset X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3 (9pt)**.** Zeigen Sie: Eine lokal-kompakte topologische Gruppe ist parakompakt. (Prop. 8.10)

Hinweis: Zeigen Sie erst folgende Aussagen:

1. Für $g \in G$ ist $(-) \cdot g : G \to G$ ein Homöomorphismus.
2. Für $H \subset G$ eine Untergruppe bilden Untermengen der Form $\{H \cdot g \subset G\}$ für $g \in G$ eine disjunkte Überdeckung von G.
3. Jede offene Untergruppe $H \subset G$ ist auch abgeschlossen.
4. Eine Untergruppe $H \subset G$ ist offen, sobald sie eine offene Untermenge enthält.
5. Es gibt eine kompakte Umgebung $C_e \subset G$ des neutralen Elementes, welche mit jedem Element auch dessen Inverses enthält.
6. Die Bilder C_e^n der n-fachen Gruppenoperation $\prod_{\{1,\cdots,n\}} C_e \to G$ sind kompakt.
7. Die Untermenge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_e^n \subset G$ ist eine offene Untergruppe.

Abgabe am 30.5. in der Vorlesung