

# Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2009/10

Blatt 9

Abgabetermin: Freitag, 8.1.2010

HAMILTON hat jahrelang gehofft, eine Multiplikation für reelle Tripel mit guten Eigenschaften zu finden. An seinen Sohn schreibt er 1865 kurz vor seinem Tode (Math. Papers 3, p. XV): „Every morning, on my coming down to breakfast, you used to ask me: ‚Well, Papa, can you multiply triplets?‘ Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: ‚No, I can only add and subtract them.‘“

Heute ist es leicht, sich klar zu machen, daß es keine  $\mathbb{R}$ -lineare Multiplikation im  $\mathbb{R}^3$  aller reellen Tripel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  geben kann, welche die Multiplikation von  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  der Paare  $(\alpha, \beta)$  fortsetzt. Bezeichnet nämlich  $e := (1, 0, 0)$ ,  $i := (0, 1, 0)$ ,  $j := (0, 0, 1)$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^3$ , so müßte gelten:  $ij := \rho e + \sigma i + \tau j$ . Daraus würde folgen, wenn man  $i^2 = -e$  und  $i(ij) = (ii)j = -j$  unterstellt:

$-j = \rho i - \sigma e + \tau ij = \rho i - \sigma e + \tau(\rho e + \sigma i + \tau j) = (\tau\rho - \sigma)e + (\tau\sigma + \rho)i + \tau^2 j$ , also (wegen der linearen Unabhängigkeit von  $e, i, j$ ):  $\tau^2 = -1$ , das heißt  $\tau \notin \mathbb{R}$ .

Aus Ebbinghaus et al.: *Zahlen*, S. 155 (3. Auflage)

## Aufgabe 49: (Matrixinversion)

Berechnen Sie die inverse Matrix zu folgenden drei Matrizen aus  $\text{Mat}_{3,3}(\mathbb{Q})$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 50: (Rechnen mit komplexen Zahlen)

Berechnen Sie die inversen Matrizen zu folgenden Matrizen in  $\text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$  und schreiben Sie alle Koeffizienten der inversen Matrizen in der Form  $a + ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{pmatrix} 3+i & 1 \\ -2i & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1+i & 1-5i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{i\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 51: (Über Dualräume)

1. Zeigen Sie: Für jedes  $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $x \in \mathbb{R}^n$  so dass gilt:  $\alpha(v) = \langle x, v \rangle$  für alle  $v \in V$ .
2. Zeigen Sie: Ist  $S$  eine (möglicherweise unendliche) Menge, so gibt es einen Isomorphismus  $(\mathbb{K}\langle S \rangle)^* \cong \mathbb{K}^S$ .

## Aufgabe 52: (Bidualraum)

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $V^*$  der Dualraum. Man definiert den *Bidualraum* von  $V$  als  $V^{**} := (V^*)^*$ . Sei  $v \in V$ . Die Formel  $(\iota_V(v))(l) = l(v) \in \mathbb{K}$  definiert eine lineare Abbildung  $\iota_V(v) : V^* \rightarrow \mathbb{K}$ , mit anderen Worten ein Element  $\iota_V(v) \in V^{**}$ . Die Abbildung  $\iota_V : V \rightarrow V^{**}$ ,  $v \mapsto \iota_V(v)$  ist linear.

Es sei jetzt  $W$  ein weiterer Vektorraum und  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass  $f$  eine lineare Abbildung  $f^* : W^* \rightarrow V^*$  induziert. Folglich erhält man eine lineare Abbildung  $f^{**} = (f^*)^* : V^{**} \rightarrow W^{**}$ .

1. Zeigen Sie:  $f^{**} \circ \iota_V = \iota_W \circ f$ .
2. Zeigen Sie: Ist  $V$  endlich-dimensional, so ist  $\iota_V$  ein Isomorphismus.

**Aufgabe 53:** (Dualräume von Homomorphismenräumen) Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

1. Es seien  $V, W$  endlichdimensionale Vektorräume,  $(v_1, \dots, v_n)$  eine geordnete Basis von  $V$ ,  $(w_1, \dots, w_m)$  eine geordnete Basis von  $W$  und  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  die duale Basis von  $W^*$ . Durch  $t_{i,j}(f) = \alpha_j(f(v_i))$  sind Elemente aus  $\text{Hom}(V, W)^*$  definiert. Zeigen Sie: die Familie  $(t_{i,j})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$  ist eine Basis von  $\text{Hom}(V, W)^*$ .
2. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung  $T : \text{Hom}(V, V) \rightarrow \text{Hom}(V, V)^*$ , welche durch  $T(A)(B) = \text{spur}(AB)$  definiert ist, ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Hinweis: überlegen Sie sich zuerst, dass es genügt, die Injektivität von  $T$  zu zeigen. Berechnen Sie dann  $\text{spur}(AD_{k,l})$ , wobei  $D_{k,l}$  wie in Aufgabe 38 ist.

**\*-Aufgabe 54:** (Die Hamiltonschen Quaternionen)

Es sei  $\mathbb{H} \subset \text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$  die Menge aller Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

mit  $a, b \in \mathbb{C}$ . Offensichtlich ist  $\mathbb{H}$  ein  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von  $\text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$  und die Familie  $(\mathbf{1}, I, J, K)$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Basis, wobei  $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Ist  $\mathbb{H}$  ein  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum?
2. Zeigen Sie: Sind  $A, B \in \mathbb{H}$ , so ist auch  $AB \in \mathbb{H}$ .
3. Zeigen Sie: Jedes  $A \in \mathbb{H}$ ,  $A \neq 0$ , ist invertierbar in  $\text{Mat}_{2,2}(\mathbb{C})$  und es gilt  $A^{-1} \in \mathbb{H}$ .
4. Zeigen Sie  $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}$ ,  $IJ = -JI = K$ ,  $JK = -KJ = I$ ,  $KI = -IK = J$ .

Da offensichtlich  $\mathbf{1} \in \mathbb{H}$ , so erfüllt  $\mathbb{H}$  alle Körperaxiome mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation. Eine solche algebraische Struktur nennt man auch *Schiefkörper*.

Es sei  $\phi : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}$  die lineare Abbildung  $((x_1, (y_1, y_2, y_3))) \mapsto x_1 \mathbf{1} + y_1 I + y_2 J + y_3 K$ . Dies ist offenbar ein Isomorphismus.

5. Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $v, w \in \mathbb{R}^3$  gilt:

$$\phi^{-1}(\phi(x, v)\phi(y, w)) = (xy - \langle v, w \rangle; xw + yv + v \times w).$$

6. Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Gleichung die Lösungsmenge der Gleichung  $x^4 = \mathbf{1}$  in  $\mathbb{H}$ . Hinweis:  $x^4 = (x^2)^2$ . Hinweis 2: Die Lösungsmenge hat mehr als 4 Elemente. Der Satz von Vandermonde (Aufgabe 35) ist also in Schiefkörpern falsch.