

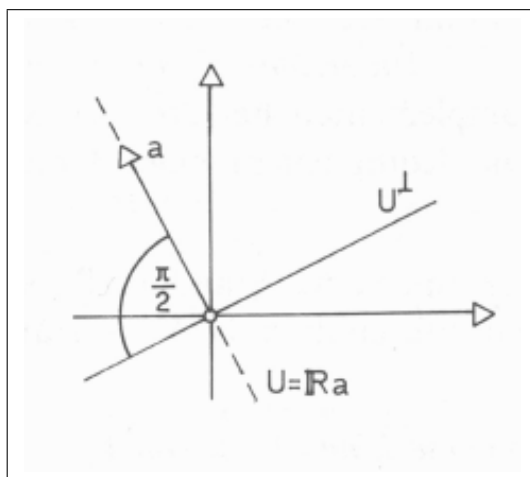
Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2009/10

Blatt 8

Abgabetermin: Freitag, 18.12.2009



Aufgabe 43: (Matrixdarstellungen geometrischer Abbildungen)

Es sei $u = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in \mathbb{R}^2$ und es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der zu u senkrechten Geraden. Genauer ausgedrückt: $f(x) = x - 2\frac{\langle u, x \rangle}{\langle u, u \rangle}u$. Sei $u_1 = u$ und $0 \neq u_2$ orthogonal zu u_1 . Dann ist $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ eine Basis von \mathbb{R}^2 . Außerdem sei $\mathcal{A} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von \mathbb{R}^2 . Berechnen Sie die darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{A}, \mathcal{A}}(f)$, $M_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}(f)$.

Aufgabe 44: (Projektoren)

Es sei \mathbb{K} ein Körper und V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Es sei $f: V \rightarrow V$ ein lineare Abbildung mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie:

1. $V = \ker(f) \oplus \text{im}(f)$.
2. $(1 - f)^2 = (1 - f)$, $\ker(f) = \text{im}(1 - f)$ und $\text{im}(f) = \ker(1 - f)$.
3. Wenn V zusätzlich endlich-dimensional ist und $n = \dim V$, so existiert eine Basis \mathcal{B} von V und eine Zahl $1 \leq m \leq n$, so dass die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ die folgende Gestalt hat: $a_{i,j} = 0$, wenn $i \neq j$ oder $i = j > m$ und $a_{i,i} = 1$ für $i \leq m$. Die Zahl m hängt nur von f , nicht aber von der Basis \mathcal{B} ab.

Aufgabe 45: (Matrixdarstellung von Differentialoperatoren)

Es sei Pol_n der Vektorraum der Polynome von Grad kleiner gleich n (über \mathbb{R}). Bekanntlich ist die Menge $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ eine Basis von Pol_n . Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Man betrachte die Abbildung $D: \text{Pol}_n \rightarrow \text{Pol}_n$, welche durch $(Dp)(x) = \frac{d^2}{dx^2}p(x) + a\frac{d}{dx}p(x) + bp(x)$ gegeben ist. Man zeige, dass D in der Tat ein Endomorphismus von Pol_n ist und gebe die Matrixdarstellung von D bezüglich der Basis \mathcal{B} an.

Aufgabe 46: (Nilpotente Matrizen)

Es sei \mathbb{K} ein Körper und V ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum, $n > 0$. Ein Endomorphismus f von V heißt *nilpotent* wenn eine natürliche Zahl m existiert, so dass $f^m = 0$ ist. Man zeige, dass die folgenden drei Aussagen für einen Endomorphismus f von V äquivalent sind:

1. f ist nilpotent.
2. Es existiert eine Kette von Unterräumen $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$, so dass $\dim V_i = i$ und $f(V_i) \subset V_{i-1}$ für alle $1 \leq i \leq n$.
3. Es existiert eine Basis \mathcal{B} von V , so dass für die Einträge der darstellenden Matrix $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})_{i,j \leq n}$ gilt: $a_{i,j} = 0$ falls $j \leq i$.

Hinweis: zeigen Sie die Implikationen $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$. Für die letzte Implikation überlege man sich zunächst, dass $V \supseteq f(V) \supseteq f^2(V) \supseteq \dots \supseteq f^{m-1}(V) \supseteq f^m(V) = 0$ gilt, falls m die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $f^m = 0$ ist.

Man zeige außerdem, dass $1 - f$ invertierbar ist, falls f nilpotent ist, und gebe das Inverse an. Hinweis: geometrische Reihe.

Aufgabe 47: (Die Spur)

Es sei \mathbb{K} ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ definiert man die *Spur* von A als Summe der Diagonaleinträge, mit anderen Worten, ist $A = (a_{ij})$, so ist $\text{spur}(A) := \sum_{k=1}^n a_{kk}$. Offensichtlich ist $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $A \mapsto \text{spur}(A)$, eine lineare Abbildung.

1. Zeigen Sie: für alle $A, B \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt $\text{spur}(AB) = \text{spur}(BA)$.
2. Zeigen oder widerlegen Sie: für alle $A, B, C \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt $\text{spur}(ABC) = \text{spur}(CAB)$.
3. Zeigen oder widerlegen Sie: für alle $A, B, C \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt $\text{spur}(ABC) = \text{spur}(BAC)$.

***-Aufgabe 48:** (Vorläufig zum letzten Mal: komplexe und reelle Vektorräume)

Es sei W ein \mathbb{C} -Vektorraum und $W_{\mathbb{R}}$ seine Reellifizierung sowie \overline{W} der komplex-konjugierte Vektorraum von W .

1. Zeigen Sie, dass die Inklusion $\kappa : W_{\mathbb{R}} \rightarrow W \oplus \overline{W}$; $v \mapsto (v, v)$ eine Komplexifizierung von $W_{\mathbb{R}}$ ist. Hinweise: benutzen Sie die Zerlegung $f = f_l + f_a$ aus Aufgabe 30.3. Außerdem mache man sich klar, dass jedes Element $(x, y) \in W \oplus \overline{W}$ als $(x, y) = (v + iw, v + i \cdot w)$ geschrieben werden kann. Zur Erinnerung: wie in Aufgabe 42 bezeichne $\lambda \cdot v$ die Skalarmultiplikation im komplex-konjugierten Vektorraum \overline{W} .
2. Aus dem ersten Aufgabenteil folgt, dass $(W_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong W \oplus \overline{W}$. Sei jetzt $f : V \rightarrow W$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung zwischen komplexen Vektorräumen. Zeigen Sie: bezüglich der Zerlegung aus dem ersten Aufgabenteil hat die Komplexifizierung $f_{\mathbb{C}}$ von f die Form $\begin{pmatrix} f_l & f_a \\ f_a & f_l \end{pmatrix}$. Hinweis: bestimmen Sie zuerst die Zerlegung $\kappa = \kappa_l + \kappa_a$.

