

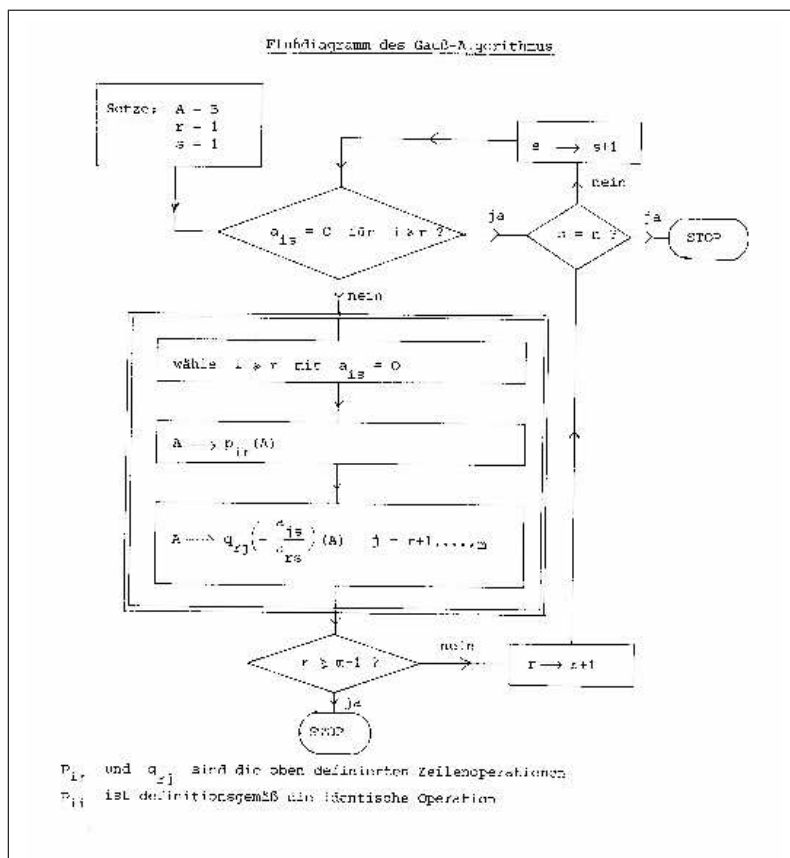
Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2009/10

Blatt 5

Abgabetermin: Freitag, 20.11.09



Aufgabe 25: (Kerne)

Es sei \mathbb{K} ein Körper, V, W, X, Y, Z seien \mathbb{K} -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$, $h : Y \rightarrow Z$ sowie $g : W \rightarrow X$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie:

1. f ist genau dann injektiv wenn $\ker(f) = \{0\}$.
2. $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.
3. $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$.
4. $\ker(f \oplus h) = \ker(f) \oplus \ker(h)$.

Aufgabe 26: (Funktionen von Mengen in Vektorräume)

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und E eine beliebige Menge. Wir betrachten die Menge $V^E = \{f : E \rightarrow V\}$ aller Funktionen von E nach V . Auf V^E werde eine Addition bzw. skalare Multiplikation wie folgt definiert: $(f + g)(e) := f(e) + g(e)$, $(\lambda f)(e) := \lambda f(e)$ für $f, g \in V^E$, $e \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Man zeige:

1. V^E ist ein \mathbb{K} -Vektorraum.
2. Ist W ein weiterer Vektorraum und $\varphi : V \rightarrow W$ linear, so ist die Abbildung $\Phi : V^E \rightarrow W^E$, welche durch $\Phi(f) = \varphi \circ f$ definiert ist, linear. Die Abbildung Φ ist genau dann injektiv, wenn φ injektiv ist und Φ ist genau dann surjektiv, wenn φ surjektiv ist.
3. Ist D eine weitere Menge und $\xi : D \rightarrow E$ eine Abbildung, so definiert die Vorschrift $\Xi(f) = f \circ \xi$ eine lineare Abbildung $\Xi : V^E \rightarrow V^D$. Dann ist Ξ genau dann injektiv, wenn ξ surjektiv ist. Ferner ist Ξ genau dann surjektiv, wenn ξ injektiv ist.
4. Falls E endlich ist mit n Elementen, so gibt es Isomorphismen $V^E \cong V \oplus \dots \oplus V$ (n Summanden) sowie $V^E \cong \text{Hom}(\mathbb{K}^n; V)$.

Aufgabe 27: (Lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme)

Es sei $t \in \mathbb{R}$ und es sei $A \in \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ t & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist die durch $x \mapsto Ax$ definierte lineare Abbildung $T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ surjektiv und für welche $t \in \mathbb{R}$ ist T_A injektiv? Hinweis: Formulieren Sie die Fragestellung in ein Problem über die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ um und lösen Sie dieses Problem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 28: (Graphen linearer Abbildungen)

Es seien V_1, V_2 zwei \mathbb{K} -Vektorräume und $f : V_1 \rightarrow V_2$ linear. Der *Graph* von f ist die Teilmenge $\text{graph}(f) = \{(v, f(v)) \mid v \in V_1\} \subset V_1 \oplus V_2$. Man zeige, dass $\text{graph}(f)$ ein Untervektorraum ist. Man fasse V_1 und V_2 als Untervektorräume von $V_1 \oplus V_2$ auf. Wann sind $\text{graph}(f)$ und V_1 komplementär? Und wann sind $\text{graph}(f)$ und V_2 komplementär?

Aufgabe 29: (Zyklische Vektoren)

Es sei V ein Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Ferner sei $v \in V$ gegeben, so dass gilt: $f^n(v) \neq 0$ und $f^{n+1}(v) = 0$. Man zeige, dass die Menge $\{v, f(v), f^2(v), \dots, f^n(v)\}$ linear unabhängig ist.

***-Aufgabe 30:** (Komplex-lineare und reell-lineare Abbildungen)

Es seien V und W komplexe Vektorräume. Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt *antilinear*, wenn für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt: $f(\lambda v) = \bar{\lambda}f(v)$. Es bezeichne $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ die Menge aller \mathbb{C} -linearen und $\text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\text{anti}}(V, W)$ die Menge aller \mathbb{C} -antilinearen Abbildungen und ferner $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ die Menge aller \mathbb{R} -linearen Abbildungen. Man zeige:

1. $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ ist ein \mathbb{C} -Vektorraum, wobei die Skalarmultiplikation für $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ wie folgt definiert ist: $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$.
2. $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ und $\text{Hom}_{\mathbb{R}}^{\text{anti}}(V, W)$ sind \mathbb{C} -Untervektorräume von $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$
3. Jedes $f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ besitzt eine eindeutig bestimmte Summenzerlegung $f = f_l + f_a$ wobei $f_l \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ und $f_a \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\text{anti}}(V, W)$.
4. Die oben konstruierten Abbildungen $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, $f \mapsto f_l$ und $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\text{anti}}(V, W)$, $f \mapsto f_a$ sind \mathbb{C} -linear.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

↓
 P_{12}

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

↓
 q_{13}, q_{14}

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & -3 & -6 & -18 \end{bmatrix}$$

↓
 q_{23}, q_{24}

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

↓
 P_{34}

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$