

# Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2009/10

Blatt 4

Abgabetermin: Freitag, 13.11.09

72. Let there exist a system of entities for which are given the following definitions:

1. The *equivalence* of two entities  $a$  and  $b$  of the system is defined, that is, a proposition, indicated by  $a = b$ , is defined, which expresses a condition between two entities of the system, satisfied by certain pairs of entities, and not by others, and which satisfies the logical equations:

$$(a = b) = (b = a), \quad (a = b) \cap (b = c) < (a = c).$$

2. The *sum* of two entities  $a$  and  $b$  is defined, that is to say an entity, indicated by  $a + b$ , is defined that also belongs to the system given, and which satisfies the conditions

$$(a = b) < (a + c = b + c), \quad a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c,$$

the common value of the two members of the last equivalence being indicated by  $a + b + c$ .

3. If  $a$  is an entity of the system, and  $m$  is a positive integer, by the expression  $ma$  we will mean the sum of  $m$  entities equal to  $a$ . It is easy to recognize that, if  $a, b, \dots$  are entities of the system, and  $m, n, \dots$  positive integers,

$$(a = b) < (ma = mb); \quad m(a + b) = ma + mb; \quad (m + n)a = ma + na; \\ m(na) = (mn)a; \quad 1a = a.$$

We will suppose that a meaning is attributed to the expression  $ma$ , whatever may be the real number  $m$ , in such a way that the preceding equations are also satisfied. The entity  $ma$  is called the *product* of the (real) number  $m$  with the entity  $a$ .

4. Finally we will suppose there exists an entity of the system, which we will call the *null entity*, and that we will indicate by  $0$ , such that whatever may be the entity  $a$ , the product of the number  $0$  with the entity  $a$  always gives the entity  $0$ ,

that is

$$0a = 0.$$

If to the expression  $a - b$  one attributes the meaning  $a + (-1)b$ , one deduces

$$a - a = 0, \quad a + 0 = a.$$

**Definition.** The system of entities for which definitions 1, 2, 3, 4 are given, in such a way as to satisfy the conditions imposed, is called a *linear system*.

Die historisch erste Definition des Vektorraumbegriffs. Giuseppe Peano, *Calcolo Geometrico*, 1888, übersetzt von L.C. Kannenberg.

## Aufgabe 19: (Lineare Abbildungen I)

Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, und  $f, g : V \rightarrow W$  lineare Abbildungen und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Man zeige:

1.  $f + g$  ist linear;
2.  $\lambda f$  ist linear;
3. Ist  $f : V \rightarrow W$  bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung  $f^{-1} : W \rightarrow V$  linear.

## Aufgabe 20: (Lineare Abbildungen II)

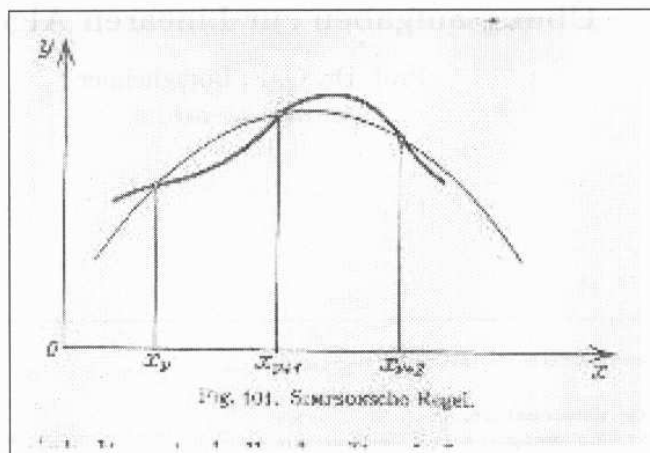
Es seien  $f : V \rightarrow W$  und  $g : W \rightarrow Z$  lineare Abbildungen von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Man zeige:

1.  $\text{id}_V$  ist linear;
2.  $g \circ f$  ist linear;
3. Ist  $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ , so gilt  $g \circ f = \lambda_1 g \circ f_1 + \lambda_2 g \circ f_2$ ;
4. Ist  $g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ , so ist  $g \circ f = \lambda_1 g_1 \circ f + \lambda_2 g_2 \circ f$ .

## Aufgabe 21: (Funktionsräume)

Es sei  $C^0([0, 1])$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf  $[0, 1]$ . Welche der folgenden Teilmengen sind  $\mathbb{R}$ -Untervektorräume von  $C^0([0, 1])$ ? Und welche Teilmengen sind nur  $\mathbb{Q}$ -Untervektorräume, aber keine  $\mathbb{R}$ -Untervektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. die Menge aller Polynomfunktionen,
2. die Menge aller positiven Funktionen,



3. die Menge aller Funktionen  $f$  mit  $f(0) = \int_0^1 f(t)dt$ ,
4. die Menge aller differenzierbaren Funktionen,
5. die Menge aller Funktionen  $f$  mit  $f(1) \in \mathbb{Q}$ .

**Aufgabe 22:** (Die Simpsonsche Regel)

Es sei  $\text{Pol}_2(\mathbb{R})$  der Vektorraum der Polynomfunktionen auf  $\mathbb{R}$  mit Grad kleiner gleich 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen  $\text{Pol}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  linear sind:

- $p \mapsto \int_0^1 p(t)dt$ ;
- $p \mapsto p(y)$  für ein festes  $y \in \mathbb{R}$ .

Zeigen Sie dann: es gibt eindeutig bestimmte  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  (und geben Sie diese Zahlen an), so dass für alle  $p \in \text{Pol}_2(\mathbb{R})$  gilt:

$$\int_0^1 p(t)dt = a_0 p(0) + a_1 p\left(\frac{1}{2}\right) + a_2 p(1).$$

**Aufgabe 23:** (Folgen- und Polynomräume)

Es sei  $c_0(\mathbb{N}_0; \mathbb{R})$  der Vektorraum aller abbrechenden Folgen, mit anderen Worten

$$c_0(\mathbb{N}_0; \mathbb{R}) := \{a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : a(n) = 0\}.$$

Konstruieren Sie eine bijektive lineare Abbildung  $\varphi : c_0(\mathbb{N}_0; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Pol}(\mathbb{R})$ , dem Vektorraum aller Polynomfunktionen. Auf  $\text{Pol}(\mathbb{R})$  existiert eine Multiplikation. Finden Sie auf  $c_0(\mathbb{N}_0; \mathbb{R})$  eine Multiplikation, so dass  $\varphi$  multiplikativ ist.

**\*-Aufgabe 24:** (Der Frobenius-Endomorphismus)

Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper der Charakteristik  $p > 0$  und  $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{K}$  der darin enthaltene Primkörper. Dadurch wird  $\mathbb{K}$  zu einem  $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum. Wir betrachten die Abbildung  $\psi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , welche durch  $\psi(x) := x^p$  definiert ist. Man zeige:

1.  $\psi$  ist ein Körperendomorphismus. Hinweis: Um die Additivität zu zeigen, benutzen Sie den binomischen Lehrsatz, wobei bewiesen werden muss, dass die Binomialkoeffizienten  $\binom{p}{k}$  für  $0 < k < p$  durch  $p$  teilbar sind.
2.  $\psi$  ist  $\mathbb{F}_p$ -linear und injektiv.
3. Ist  $\mathbb{K}$  endlich, so ist  $\psi$  bijektiv.