

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2009/10

Blatt 3

Abgabetermin: Freitag, 6.11.09

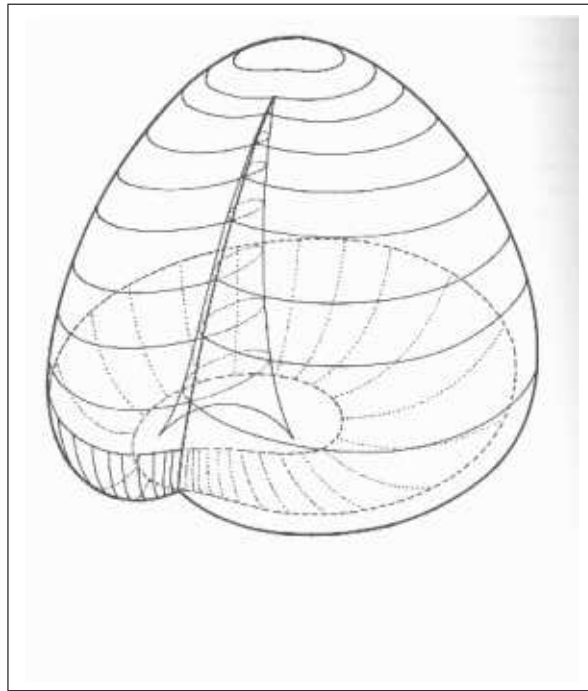


Abbildung 1: Die "reell-projektive Ebene": die Punkte dieser geometrischen Figur entsprechen den 1-dimensionalen Unterräumen des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 13: (Drei Ebenen)

Die Ebenen E_1, E_2 und E_3 im $\mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$E_1 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$$

$$E_2 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$E_3 : -x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Man bestimme die Schnittgeraden von E_1, E_2 , von E_2, E_3 und von E_1, E_3 .
Schneiden sich die drei Ebenen?

Aufgabe 14: (Noch ein lineares Gleichungssystem)

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem lösbar? Geben Sie die Lösungen an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t + 7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t + 8 \end{array} \right)$$

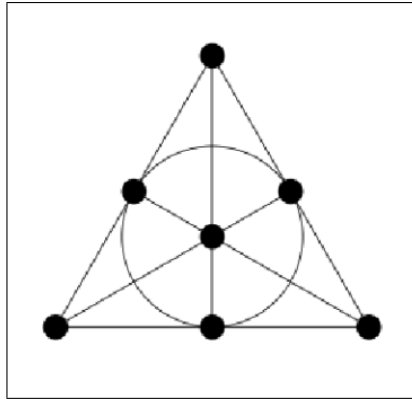


Abbildung 2: Die Fano-Ebene: Die dicken Punkte entsprechen den 1-dimensionalen Unterräumen des Vektorraumes $\mathbb{F}_2^3$, die Kurven entsprechen den 2-dimensionalen Unterräumen.

Aufgabe 15: (Lineare Gleichungen über $\mathbb{F}_p$)

Für welche Primzahlen p besitzt das LGS

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

über dem Körper $\mathbb{F}_p$ eine (beziehungsweise eine eindeutige) Lösung? Hinweis: Über den Körper $\mathbb{F}_p$ müssen Sie nur wissen, dass darin die Division durch alle ganzen Zahlen, welche nicht durch p teilbar sind, möglich ist. Lösen Sie das LGS zunächst über dem Körper $\mathbb{Q}$ und überlegen Sie dann, für welche Primzahlen p diese Rechnung genauso ausgeführt werden kann. Für die verbleibenden Primzahlen analysieren Sie die Situation separat.

Aufgabe 16: (Gauß-Algorithmus)

Lösen Sie mit dem Gauß-Algorithmus das folgende LGS über $\mathbb{Q}$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 5 & 1 & 11 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Aufgabe 17: (Der Körper $\mathbb{F}_4$)

Man konstruiere einen Körper $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, a, b, \}$ mit genau 4 Elementen.

***-Aufgabe 18:** (Spaltenumformungen)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Man betrachte ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$, $x \in \mathbb{K}^n$. Man fasse b als einen Spaltenvektor auf und x als einen *Zeilenvektor*. Man definiere - analog zu den Zeilenumformungen - elementare Spaltenumformungen $SM_j(\lambda)$ (Multiplikation der j -ten Spalte mit $\lambda \in \mathbb{K}$), $SA_{i,j}$ (Addition der j -ten Spalte zur i -ten) sowie $SV_{i,j}$ (Vertauschung der i -ten und j -ten Spalte). Man zeige, dass jede dieser drei Operationen eine invertierbare Abbildung

$$\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$$

definiert. Insbesondere gilt dies für $m = 1$, dass heißt, weil x als Zeilenvektor interpretiert wird, kann auch x den Spaltenumformungen unterzogen werden. Sei nun S eine Spaltenumformung, d.h. eine Komposition elementarer Spaltenumformungen. Zeigen Sie, dass $S(A)x = AS(x)$ gilt. Folgern Sie, dass für die Lösungsräume gilt

$$\mathcal{L}(S(A)|b) = S^{-1}\mathcal{L}(A|b).$$