

# Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödiger

Wintersemester 2009/10

Blatt 2

Abgabetermin : Freitag, 30.10.2009

## 112 Das skalare Produkt zweier Vektoren

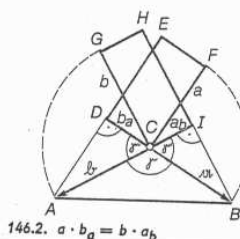
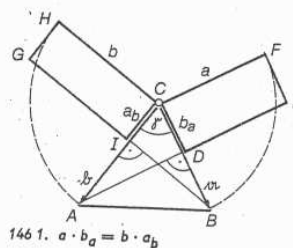
- ① Wiederhole die Herleitung des „Projektionssatzes“  $a \cdot b_a = b \cdot a_b$  auf S. 20. Beachte insbesondere auch die „Bemerkung“ auf S. 20.
- ② Wiederhole auch die Herleitung des verallgemeinerten Satzes von Pythagoras auf S. 20 (Fig. 20.3 und 20.4).

1. In Fig. 146.1/2 sei  $b_a = \overline{CD}$  die Länge der orthogonalen Projektion von  $AC$  auf  $(BC)$ , ferner  $a_b = \overline{CI}$  die Länge der orthogonalen Projektion von  $BC$  auf  $(AC)$ . In 146.1 ist  $\gamma$  spitz,  $b_a = b \cdot \cos \gamma$ ,  $a_b = a \cdot \cos \gamma$ . In 146.2 ist  $\gamma$  stumpf,  $b_a = b \cdot \cos \gamma' = b \cdot |\cos \gamma|$  und  $a_b = a \cdot |\cos \gamma|$ ; also gilt für die roten Rechtecke:

**Projektionssatz (S. 20):  $a \cdot b_a = b \cdot a_b = a \cdot b \cdot |\cos \gamma|$ .**

⊃ 1 gilt auch für  $\gamma = 90^\circ$ ; es gilt dann

$$a \cdot b_a = b \cdot a_b = 0.$$



### Der Projektionssatz

**Aufgabe 1:** (Fünf Gleichungen in 5 Unbekannten)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + 3x_2 + 4x_3 & & + 2x_5 & = & 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 & + x_4 & & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & & & = & 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 11x_3 & + 4x_4 & & = & 5 \\ 3x_1 + 8x_2 + 11x_3 & + x_4 & + 2x_5 & = & 16 \end{array}$$

**Aufgabe 2:** (Vogelaufgabe)

Für welche  $b_1, b_2$  ist das folgende LGS lösbar?

$$\begin{array}{rcl} 6x_1 + 8x_2 & = & b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Für welche positiven  $b_1, b_2$  gibt es positive Lösungen  $x_1, x_2$ ?

Für welche ganzzahligen  $b_1, b_2$  gibt es ganzzahlige Lösungen  $x_1, x_2$ ?

Wir gehen nun zur Ableitung des Erhaltungssatzes über, der aus der *Isotropie des Raumes* folgt.

Diese Isotropie bedeutet, daß die mechanischen Eigenschaften eines abgeschlossenen Systems sich bei einer beliebigen Drehung des Gesamtsystems im Raum nicht ändern. Dementsprechend betrachten wir eine unendlich kleine Drehung des Systems und fordern, daß seine LAGRANGE-Funktion dabei un geändert bleibt.

Wir führen den Vektor  $\delta\varphi$  einer infinitesimalen Drehung ein, dessen Betrag gleich dem Drehwinkel  $\delta\varphi$  ist und dessen Richtung mit der Drehachse zusammenfällt (und zwar so, daß die Drehrichtung mit der Richtung von  $\delta\varphi$  eine Rechtsschraube bildet).

Zunächst wollen wir den durch eine solche Drehung verursachten Zuwachs eines Radiusvektors bestimmen, der vom Koordinatenanfangspunkt (der auf der Drehachse liegt) zu irgendeinem Massenpunkt des sich drehenden Systems verläuft. Die lineare Verschiebung des Endes des Radiusvektors ist mit dem Winkel durch die Beziehung  $|\delta\mathbf{r}| = r \sin \Theta \cdot \delta\varphi$  verknüpft (Abb. 5). Der Vektor  $\delta\mathbf{r}$  steht senkrecht auf der durch  $\mathbf{r}$  und  $\delta\varphi$  aufgespannten Ebene. Daher gilt

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\varphi \cdot \mathbf{r}]^{\perp}. \quad (9,1)$$

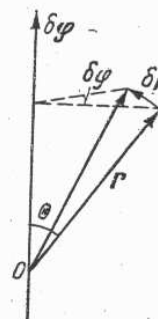


Abb. 5

<sup>1)</sup> Mit der Klammer [ ] wird das Vektorprodukt bezeichnet

Das Vektorprodukt und infinitesimale Drehungen; aus Landau, Lifschitz: "Mechanik"

**Aufgabe 3:** (Mehrfache Kreuzprodukte)

Es seien  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  Vektoren. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

1. die Graßmann-Identität

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w, \quad (1)$$

2. die Jacobi-Identität

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0 \quad (2)$$

3. und die Adjunktionsformel

$$\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle. \quad (3)$$

**Aufgabe 4:** (Vielfache der Eins)

In einem Körper  $\mathbb{K}$  definieren wir für eine natürliche Zahl  $n$  das  $n$ -te Vielfache der Eins als  $n \cdot 1 := (1 + \dots + 1)$ , also die 1  $n$  mal aufaddiert. Man zeige durch vollständige Induktion:  $(n \cdot 1) \cdot (m \cdot 1) = (nm) \cdot 1$ . Folgern Sie: falls  $\mathbb{K}$  die Charakteristik  $p > 0$  hat, so gilt  $p \cdot 1 = 0$ .

**Aufgabe 5:** (Rechenregeln in Körpern)

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Zeigen Sie:

1.  $-0 = 0$ ,
2.  $1^{-1} = 1$  und
3.  $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$  für jedes  $a \in \mathbb{K}$ .
4. Für ein  $a \in \mathbb{K}$  gibt es nur ein einziges  $a' \in \mathbb{K}$  mit  $a + a' = 0$ .
5. Für ein  $a \in \mathbb{K}$ ,  $a \neq 0$ , gibt es nur ein einziges  $\bar{a}$  mit  $a \bar{a} = 1$ .
6. Für  $a, b \in \mathbb{K}$  mit  $a^2 = b^2$  gilt  $a = b$  oder  $a = -b$ .

**\*-Aufgabe 6:** (Es gibt keine bijektive Exponentialabbildung)

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, und  $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} - \{0\}$ .

Zeigen Sie, dass es keinen Isomorphismus  $E : (\mathbb{K}, +) \rightarrow (\mathbb{K}^\times, \cdot)$  gibt. Das heisst, es gibt keine bijektive Abbildung  $E : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^\times$ , so dass  $E(x+y) = E(x) \cdot E(y)$  gilt. (Man mache sich klar, dass dann automatisch  $E(0) = 1$  und  $E(-x) = E(x)^{-1}$  gilt.)