

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2009/10

Blatt 14

Keine Abgabe

Aufgabe 78: (Die Determinante der Cartan-Matrizen)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden sogenannten *Cartan-Matrizen*:

$$\begin{array}{l}
 E_6: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 E_7: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 E_8: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 F_4: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad G_2: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Aus J. Humphreys: *Introduction to Lie algebras and Representation theory*

Aufgabe 79: (Möbiustransformationen)

Es sei \mathbb{K} ein Körper und $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$ der projektive Raum. Wie in Aufgabe 69 operiert die Gruppe $GL_2(\mathbb{K})$ transitiv auf $\mathbb{K}\mathbb{P}^1$. Man betrachte die Menge $\widehat{\mathbb{K}} := \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, wobei $\infty \notin \mathbb{K}$. Man zeige, dass $\phi: \widehat{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^1$; $\mathbb{K} \ni x \mapsto \text{span}(x, 1)$; $\infty \mapsto \text{span}(1, 0)$; eine Bijektion ist.

Folglich operiert $GL_2(\mathbb{K})$ auf der Menge $\widehat{\mathbb{K}}$ durch $(A, x) \mapsto \phi^{-1}A\phi(x)$. Man zeige, dass die Operation einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ durch die Formel

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

gegeben ist, wobei man setzt: $\frac{x}{0} = \infty$, $\frac{x}{\infty} = 0$, $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \frac{a}{c}$.

Es sei jetzt der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ betrachtet. Es sei $H \subset \mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ die *obere Halbebene*, das heißt $H := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$. Wie üblich betrachte man $GL_2(\mathbb{R})$ als Untergruppe von $GL_2(\mathbb{C})$, welche dann auf $\widehat{\mathbb{C}}$ operiert. Man zeige, dass $GL_2(\mathbb{R})$ die Menge H invariant lässt.

Aufgabe 80: (Noch mehr Möbiustransformationen)

Wie in Aufgabe 80 betrachte man die Operation von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ auf $\widehat{\mathbb{K}}$. Aus Aufgabe 69 ist bekannt, dass genau die Vielfachen der Einheitsmatrix trivial auf $\widehat{\mathbb{K}}$ operieren. Also operiert die *projektiv-lineare* Gruppe $\mathbb{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})/Z_2$ auf $\widehat{\mathbb{K}}$, wobei Z_2 genau aus den Vielfachen der Einheitsmatrix operiert.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei F_n die Menge $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\widehat{\mathbb{K}})^n \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$. Man zeige, dass $\mathbb{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ transitiv auf F_1, F_2, F_3 operiert und dass die Operation von $\mathbb{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ auf F_3 frei ist. Hinweis: es genügt, zu zeigen, dass für $(x_1, x_2, x_3) \in F_3$ ein $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ existiert mit $AX_1 = 0$, $Ax_2 = 1$, $Ax_3 = \infty$.

Hingegen operiert $\mathbb{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ *nicht* transitiv auf F_4 , wie im zweiten Teil dieser Aufgabe zu zeigen ist.

Für je 4 paarweise verschiedene x_1, x_2, x_3, x_4 sei das *Doppelverhältnis* durch

$$\mathrm{DV}(x_1, x_2, x_3, x_4) := \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

definiert. Man zeige:

1. Für alle $f \in \mathbb{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ und $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M_4$ gilt $\mathrm{DV}(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)) = \mathrm{DV}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.
Hinweis: eine direkte Rechnung ist möglich. Der Rechenaufwand und die Zahl der Fehlerquellen lassen sich aber erheblich reduzieren, wenn man ausnutzt, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ von Elementarmatrizen erzeugt wird.
2. Ist $\mathrm{DV}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{DV}(y_1, y_2, y_3, y_4)$, so existiert ein $f \in \mathbb{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ mit $f(x_i) = y_i$.

Aufgabe 81: (Vandermonde-Determinante)

Es sei \mathbb{K} ein Körper sowie $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Es sei

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n+1, n+1}(\mathbb{K})$$

die *Vandermonde-Matrix*. Zeigen Sie:

$$\det V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Benutzen Sie dieses Ergebnis, um eine neue Lösung für Aufgabe 35 zu finden.

Aufgabe 82: (Charakterisierung abelscher Gruppen)

Es bezeichne G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Abbildung $G \times G \rightarrow G$; $(g, h) \mapsto gh$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
2. Die Abbildung $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
3. G ist abelsch.

Zeigen Sie ferner:

4. Ist $\mu : G \times G \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\mu(1, g) = \mu(g, 1) = g$, so ist G abelsch und $\mu(g, h) = gh$.

Aufgabe 83: (Blockmatrizen)

Es seien $A \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ und $C \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ sowie

$$D := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m+n, m+n}(\mathbb{K}).$$

Zeigen Sie: $\det(D) = \det(A) \det(B)$.

Aufgabe 84: (Ein kleines Lemma)

Es sei \mathbb{K} ein Körper, V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $f_1, f_2, g \in \text{Hom}(V, V)$. Zeigen Sie:

1. Falls $\ker(g) \subset \ker(f)$, so existiert ein $a \in \text{Hom}(V, V)$ mit $ag = f$.
2. Es existieren $a_1, a_2 \in \text{Hom}(V, V)$ mit $\ker(a_1 f_1 + a_2 f_2) = \ker(f_1) \cap \ker(f_2)$.

Aufgabe 85: (Ideale im Matrizenring)

Es sei $\text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ der Vektorraum der Matrizen über dem Körper \mathbb{K} . Ein *Linksideal* ist ein Untervektorraum $I \subset \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ so dass gilt: $a \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}), f \in I \Rightarrow af \in I$.

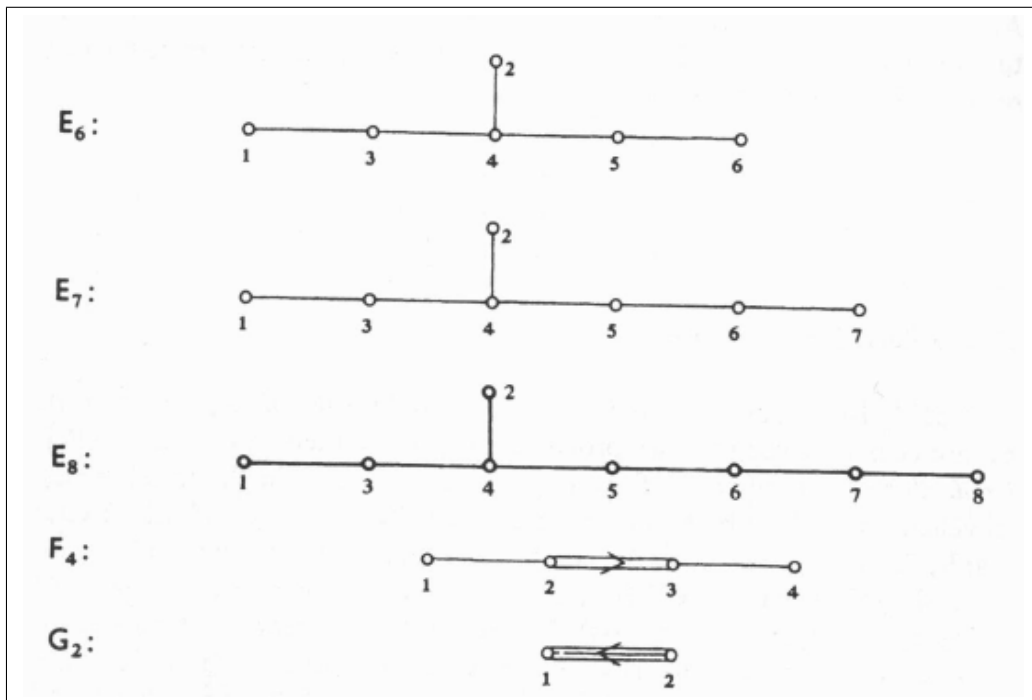
1. Ist $V \subset \mathbb{K}^n$ ein Unterraum, so ist $I_V := \{f \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \mid V \subset \ker(f)\}$ ein Linksideal.
2. Ist $I \subset \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ ein Linksideal, so ist $V_I := \bigcap_{f \in I} \ker(f)$ ein Untervektorraum.
3. Zeigen Sie: Ist $V \subset \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum, so gilt: $V_{(I_V)} = V$.
4. Zeigen Sie: Ist $I \subset \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ ein Linksideal, so ist $I_{(V_I)} = I$.
5. Zeigen Sie: für jedes Linksideal I existiert ein eindeutig bestimmter Unterraum $V \subset \mathbb{K}^n$ mit $I = I_V$.

Hinweis: Teil 5 folgt aus Teilen 1-4. Teil 4 ist der schwierige Teil. Die Inklusion $I \subset I_{(V_I)}$ ist relativ banal. Für $I_{(V_I)} \subset I$ gehen Sie wie folgt vor. Zeigen Sie zuerst: es gibt $f_1, \dots, f_r \in I$ mit $\bigcap_{i=1, \dots, r} \ker(f_i) = V_I$. Mithilfe von Aufgabe 82 können Sie dann schliessen, dass ein $f \in I$ existiert mit $\ker(f) = V_I$. Eine weitere Anwendung von Aufgabe 82 beendet den Beweis.

”Dual” zu den Linksidealien können wir auch *Rechtsideale* betrachten; d.h. Unterräume $R \subset \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ mit $a \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}), f \in R \Rightarrow fa \in R$. Zeigen Sie

6. Ist $V \subset \mathbb{K}^n$ ein Unterraum, so ist $R_V := \{f \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \mid \text{im}(f) \subset V\}$ ein Rechtsideal.
7. Ist R ein Rechtsideal, so gibt es einen eindeutig bestimmten Unterraum $V \subset \mathbb{K}^n$ mit $R = R_V$.
8. Ist $J \subset \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ sowohl ein Links- als auch ein Rechtsideal, so gilt $J = 0$ oder $J = \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Tip: beachten Sie: ist R ein Rechtsideal, so ist $R^T := \{f^T \mid f \in R\}$ ein Linksideal!! Benutzen Sie die Charakterisierung der Linksideale sowie Dualitätstheorie.



Aus J. Humphreys: *Introduction to Lie algebras and Representation theory*