

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödighheimer

Wintersemester 2009/10

Blatt 11

Abgabetermin: Freitag, 22.1.2010

Name des Polyeders	Art der begrenzenden Polygone	Anzahl der			
		Ecken	Kanten	Flächen	in einer Ecke zusammenstoßenden Flächen
Tetraeder (Abb. 95)	Dreieck	4	6	4	3
Oktaeder (Abb. 96)	„	6	12	8	4
Ikosaeder (Abb. 97)	„	12	30	20	5
Würfel (Hexaeder) (Abb. 98)	Viereck	8	12	6	3
Dodekaeder (Abb. 99) . . .	Fünfeck	20	30	12	3

Aus: Hilbert, Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*

Aufgabe 61: (allgemeine lineare Gruppe über endlichen Körpern)

Es sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Zeigen Sie: die Gruppe $GL_n(\mathbb{F})$ hat die Ordnung $|GL_n(\mathbb{F})| = \prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k)$.

Aufgabe 62: (über die symmetrische Gruppe)

Es sei S_n die symmetrische Gruppe auf n Elementen. Zeigen Sie: zwei Elemente $\sigma, \tau \in S_n$ sind genau dann zueinander konjugiert in S_n , wenn σ und τ denselben Zykeltyp besitzen.

Aufgabe 63: (die affine Gruppe)

Es sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine *affine Abbildung* $f : V \rightarrow V$ ist eine Abbildung der Form $f(v) = g(v) + b$, wobei $g : V \rightarrow V$ linear ist und $b \in V$. Zeigen Sie:

1. Die affine Abbildung $f(v) = g(v) + b$ ist genau dann bijektiv, wenn g bijektiv ist.
2. Die Menge $\text{Aff}(V)$ aller affinen bijektiven Abbildungen, zusammen mit der Komposition von Abbildungen, ist eine Gruppe.
3. Die Gruppe $\text{Aff}(V)$ ist isomorph zum semidirekten Produkt $V \rtimes GL(V)$, wobei $GL(V)$ auf V wie folgt operiert: $(g, v) \mapsto g(v)$.

Aufgabe 64: (die Tetraedergruppe)

Es sei $v_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, der i -te Standardbasisvektor. Ferner sei $v_4 := -v_1 - v_2 - v_3$. Man betrachte den schiefen Tetraeder $T \subset \mathbb{R}^3$ mit den Ecken v_1, v_2, v_3, v_4 . Es sei $G \leq GL_3(\mathbb{R})$ die Gruppe aller linearen Abbildungen f mit $f(T) = T$. Man zeige, dass $f \in GL_3(\mathbb{R})$ genau dann zu G gehört wenn $f(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ gilt. Außerdem beweise man, dass es einen Isomorphismus $G \cong S_4$ gibt. Hinweis: nutzen Sie aus, dass S_4 von Transpositionen erzeugt wird.

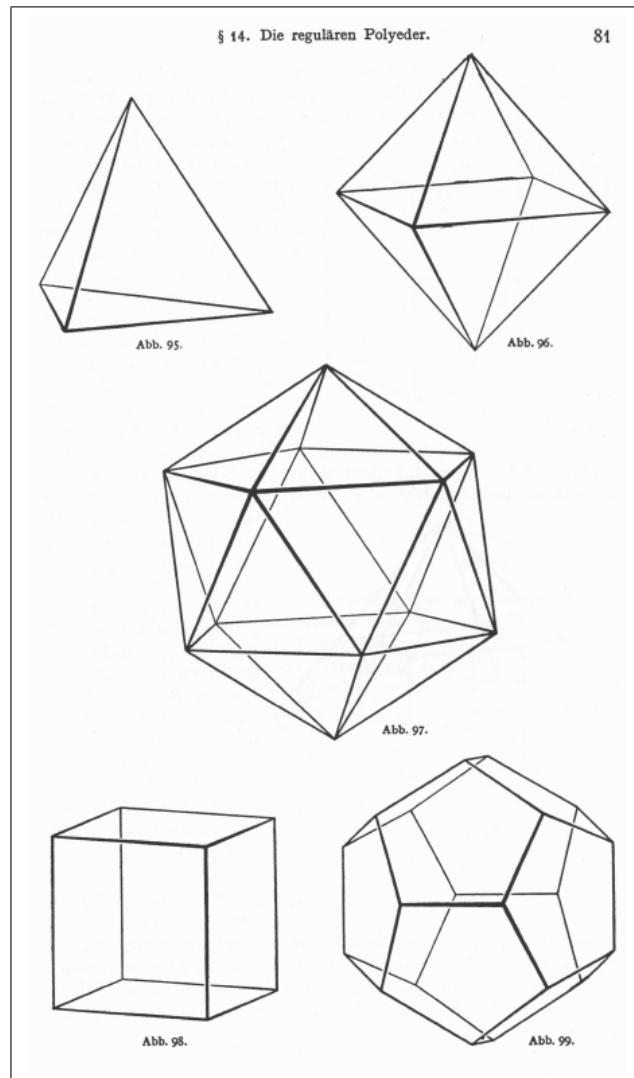
Aufgabe 65: (Dreiecke in $\mathbb{R}^2$)

Ein *Dreieck* in $\mathbb{R}^2$ ist eine (ungeordnete) Menge $D = \{x_1, x_2, x_3\}$ von Vektoren in $\mathbb{R}^2$, so dass $\{x_2 - x_1, x_3 - x_1\}$ linear unabhängig ist (diese Bedingung ist offensichtlich symmetrisch). Es sei M die Menge aller Dreiecke. Die Gruppe $\text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ (siehe Aufgabe 63) operiert wie folgt auf M . Ist $f \in \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ und $D = \{x_1, x_2, x_3\} \in M$, so setzt man: $f.D := \{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$. Ferner sei der *Schwerpunkt* des Dreiecks $D = \{x_1, x_2, x_3\}$ durch $S_D = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass dies wirklich eine Gruppenoperation von $\text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ auf M definiert.
2. Zeigen Sie, dass $\text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ transitiv auf M operiert.
3. Berechnen Sie die Standgruppe $\text{Aff}(\mathbb{R}^2)_D$ für ein Dreieck D Ihrer Wahl.
4. Zeigen Sie, dass alle Standgruppen $\text{Aff}(\mathbb{R}^2)_D$, $D \in M$, isomorph zu S_3 sind (aus der Vorlesung wissen Sie, dass S_3 isomorph zur Diedergruppe D_6 ist).
5. Zeigen Sie: $S_{f(D)} = f(S_D)$ für alle $f \in \text{Aff}(\mathbb{R}^2)$ und $D \in M$. Zeigen Sie außerdem: falls $D, D' \in M$ mit $S_D = S_{D'} = 0$, so existiert ein $f \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $f(D) = D'$.

***-Aufgabe 66:** (lineare Unabhängigkeit von Gruppenhomomorphismen)

Es sei G eine Gruppe und $\mathbb{K}$ ein Körper. Es seien $\phi_i : G \rightarrow \mathbb{K}^\times$ paarweise verschiedene Gruppenhomomorphismen, $i = 1, \dots, n$. Wir können die Homomorphismen ϕ_i als Elemente des Vektorraumes $\mathbb{K}^G$ auffassen. Zeigen Sie, dass $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ linear unabhängig ist. Hinweis 1: Induktion über n . Hinweis 2: Beachten Sie $\sum_i a_i \phi_i(gh) = \sum_i a_i \phi_i(g) \phi_i(h)$.



Aus: Hilbert, Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*