

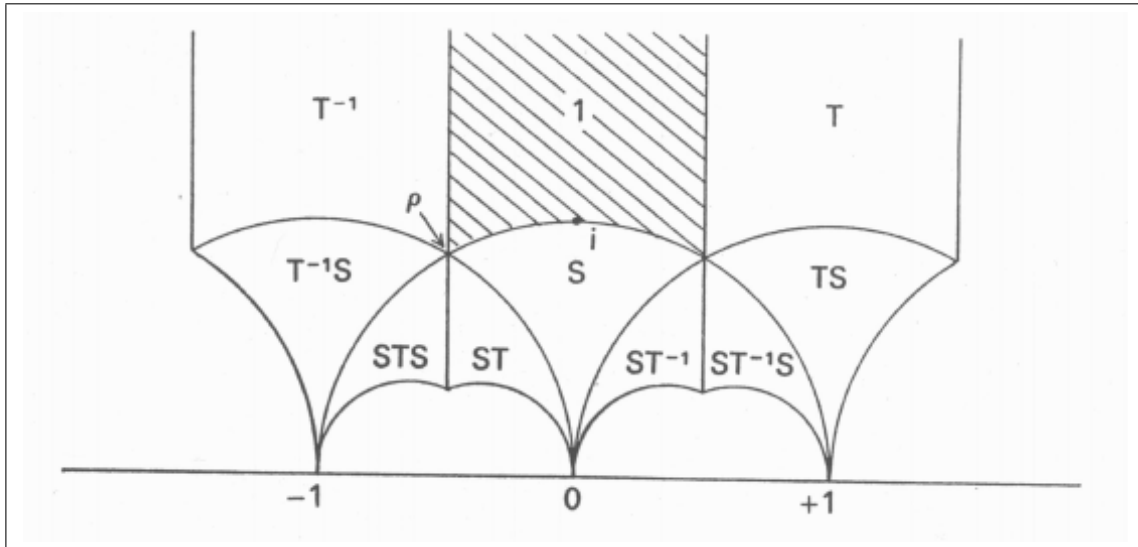
Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2009/10

Blatt 10

Abgabetermin: Freitag, 15.1.2010



Aus: Jean-Pierre Serre, *Cours d'Arithmetique*

Aufgabe 55: (einige Gruppen)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen mit der angegebenen Verknüpfung Gruppen sind.

1. die Menge $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ aller invertierbaren $n \times n$ -Matrizen mit der Matrizenmultiplikation (die *allgemeine lineare Gruppe*);
2. die Menge der n -ten *Einheitswurzeln* $C_n(\mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K} \mid x^n = 1\}$, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper ist, mit der von $\mathbb{K}$ induzierten Multiplikation;
3. der *Zentralisator* eines gegebenen $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, d.h. die Menge $Z(A) := \{B \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \mid BA = AB\}$, mit der Matrizenmultiplikation;

Aufgabe 56: (orthogonale Gruppen)

Es sei $O(n) := \{A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbf{1}_n\}$. Zeigen Sie, dass $O(n)$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist. Man zeige ferner, dass $O(n)$ die Menge aller Matrizen $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ist, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle$.

Ist $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$, so definiert die Vorschrift $f_a(z) = az$ eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (dies ist eine Drehung). Auf ähnliche Weise kann man eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung g_a von $\mathbb{C}$ durch $g_a(z) = a\bar{z}$ definieren (es ist dies eine Spiegelung). Zeigen Sie, dass die Menge

$$G = \{f_a \mid a \in \mathbb{C}, |a| = 1\} \cup \{g_b \mid b \in \mathbb{C}, |b| = 1\},$$

zusammen mit der Komposition linearer Abbildungen, eine Gruppe ist.

Mittels des Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, der durch $e_1 \mapsto 1$, $e_2 \mapsto i$ gegeben ist, können wir G als Untergruppe von $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ auffassen. Man zeige, dass $G = O(2)$.

Aufgabe 57: (Diedergruppen)

Es sei G die Gruppe aus Aufgabe 56. Es sei $D_{2n} \subset G$ die Menge aller $f \in G$ mit $f(C_n(\mathbb{C})) = C_n(\mathbb{C})$. Man zeige, dass D_{2n} eine Untergruppe von G ist, die n -te *Diedergruppe* D_{2n} .

Man bestimme die Anzahl der Elemente von D_{2n} .

Aufgabe 58: (nochmals zum Dualraum)

Es sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{K}$ -Vektorraum und man betrachte eine Menge $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subset V^*$. Diese Menge definiert eine lineare Abbildung $l_{\mathcal{A}} : V \rightarrow \mathbb{K}^k$; $v \mapsto (\alpha_1(v), \dots, \alpha_k(v))$. Man zeige:

1. $l_{\mathcal{A}}$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist eine Basis von V^* .

Es gelten sogar die folgenden Aussagen:

- *-2. $l_{\mathcal{A}}$ ist injektiv $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist ein Erzeugendensystem. Hinweis: Um die Implikation " $\Rightarrow$ " zu zeigen, wählen Sie $\phi \in V^{**}$ mit $\phi(\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}) = 0$ und benutzen Aufgabe 52.
- *-3. $l_{\mathcal{A}}$ ist surjektiv $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist linear unabhängig. Hinweis: Um die Implikation " $\Leftarrow$ " zu zeigen, wählen Sie $f \in (\mathbb{K}^k)^*$ mit $f \circ l_{\mathcal{A}} = 0$ und zeigen Sie, dass dann $f = 0$ gelten muss.

Aufgabe 59: ($\text{SL}_2(\mathbb{Z})$)

Es sei $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Menge aller Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und $ad - bc = 1$. Zeigen Sie, dass $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist.

Es seien jetzt 0

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass S und T die Gruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugen, das heißt, für jedes $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ existieren ein $m \in \mathbb{N}$ und Matrizen $A_i \in \{S, S^{-1}, T, T^{-1}\}$, $i = 1, \dots, m$, so dass $A = A_1 A_2 \dots A_m$. Hinweis: 1.: Linksmultiplikation mit T , S ist eine Zeilenumformung. 2.: durch iterierte Zeilenumformungen kann man erreichen, dass $c = 0$. 3.: um 2. einzusehen, betrachten Sie die Absolutbeträge $|a|, |c|$.

***-Aufgabe 60:** (Charakterisierung der Spur)

Für zwei Matrizen $A, B \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ sei der *Kommutator* definiert als $[A, B] := AB - BA \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $\phi : \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

1. Es gilt $\phi([A, B]) = 0$ für alle $A, B \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$.
2. Es gibt $\lambda \in \mathbb{K}$, so dass $\phi(A) = \lambda \text{spur}(A)$ für alle $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt.

Hinweis: Aufgaben 41, 47, 53! Zeigen Sie, dass $\phi(A) = \text{spur}(CA)$ für ein eindeutig bestimmtes C und alle A . Folgern Sie dann, dass für alle A, B gilt: $\text{spur}([A, C]B) = 0$, woraus dann $[A, C] = 0$ und $C = \lambda \mathbf{1}$ folgt.

Filmabend am 12. Januar 2010 um 20:00 Uhr im großen Hörsaal (We10).

Gezeigt wird eine Komödie von Guy Ritchie (1998).

FILMTITEL = A^T mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 & 7 \\ 21 & 1 & 9 & 18 \\ 2 & 13 & 14 & 1 \\ 5 & 5 & 7 & 19 \end{pmatrix}$$

Zum Dekodieren die kanonische Zuordnung von Buchstabe zu Zahl verwenden.

Alle Freunde der Mathematik sind herzlich eingeladen! Es gibt Kekse...)