

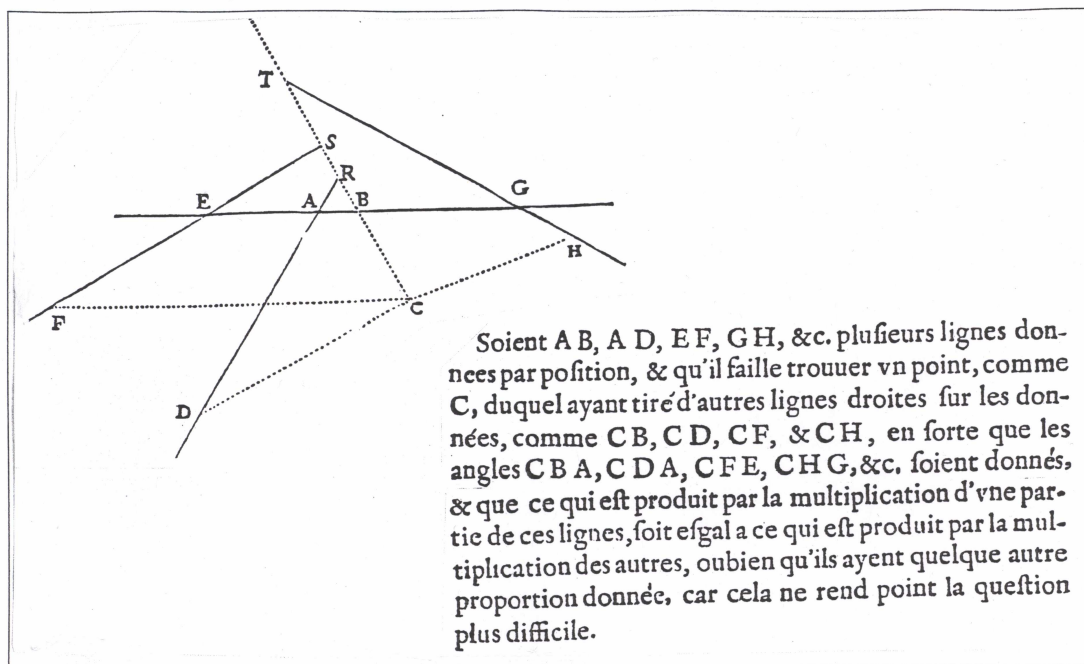
Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Wintersemester 2009/10

Blatt 1

Abgabetermin : Freitag, 23. Oktober 2009



Rene Descartes: La Geometrie (1637)

Aufgabe 1 (Tangente an Kurve)

Die Kurve K im $\mathbb{R}^2$ sei durch die Gleichung $y = x^2 - x^3$ gegeben. Für einen Punkt $Q = (\zeta_1, \zeta_2)$ auf K bezeichne T_Q die Tangente an die Kurve im Punkt Q . Man bestimme für einen Punkt $P = (a, 0)$ auf der x -Achse alle Punkte Q , deren Tangente T_Q durch P geht.

Aufgabe 2 (Zahlenbereiche)

Es sei p eine natürliche Zahl, die keine Quadratzahl ist. Man zeige, dass die Menge $\mathbb{K}$ aller reellen Zahlen x von der Form

$$x = a + b\sqrt{p} \quad a, b \text{ rational,}$$

abgeschlossen ist unter Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Aufgabe 3 (Irrationale Wurzeln)

Es sei $a \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl. Dann gibt es keine rationale Zahl x mit $x^2 = a$.

Mit fast dem gleichen Beweis zeigt man allgemeiner für natürliches $n \geq 2$:

Ist a keine n -te Potenz, so gibt es keine rationale Zahl x mit $x^n = a$.

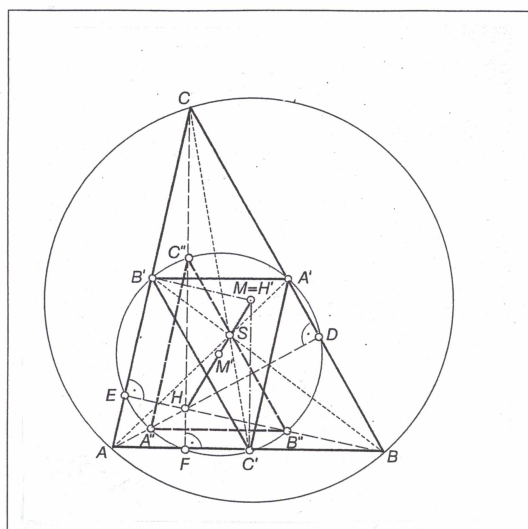
Aufgabe 4 (Ebene und Gerade)

Die Ebene E im $\mathbb{R}^3$ gehe durch die Punkte $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$ und $C = (0, 2, 1)$, und die Gerade G gehe durch die Punkte $P = (0, -3, 0)$ und $Q = (2, 4, 1)$.

(a) Man stelle die Parameterform und die Achsenabschnittsform der Ebene E auf und gebe die Achsenabschnitte an.

(b) Man berechne den Normalenvektor der Länge eins zu E und berechne den Abstand von E zum Nullpunkt.

(c) Man stelle die Parameterform der Geraden G auf und berechne den Schnittpunkt von G und E .



Satz von Euler und der Feuerbach-Kreis

Aufgabe 5. (Geschwindigkeit und Beschleunigung)

Eine vektorwertige Funktion mit differenzierbaren Komponenten leitet man komponentenweise ab, also

$$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix}$$

wobei $x'_i(t) = \frac{d}{dt}x_i(t)$ die Ableitung einer Komponenten ist.

(a) Ist $x(t)$ eine vektorwertige und $\lambda(t)$ eine skalarwertige Funktion, so gilt:

$$(\lambda(t)x(t))' = \lambda'(t)x(t) + \lambda(t)x'(t).$$

(b) Für zwei vektorwertige Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ gilt:

$$\langle x(t), y(t) \rangle' = \langle x'(t), y(t) \rangle + \langle x(t), y'(t) \rangle.$$

(c) Nun sei $v(t) = x'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor eines sich im $\mathbb{R}^3$ längs der Bahn $x(t)$ bewegenden Punktes. Man normiere diesen auf Länge 1, setze also $\bar{v}(t) := v(t) / \|v(t)\|$, wobei $\|v(t)\| \neq 0$ vorausgesetzt sei. Durch Ableitung von $\langle \bar{v}(t), \bar{v}(t) \rangle = 1$ folgere man:
 Die Ableitung $n(t) := \frac{d}{dt} \bar{v}(t)$ steht senkrecht auf $v(t)$, und der Beschleunigungsvektor $a(t) = x''(t)$ liegt in der von $v(t)$ und $n(t)$ aufgespannten Ebene (falls $n(t) \neq 0$).

***Aufgabe 6** (Seitenteilende im Dreieck)

Gegeben sei ein Dreieck A, B, C in der Ebene und drei Zahlen λ, μ, ν mit $0 < \lambda, \mu, \nu < 1$. Der Punkt T_a teile die Seite $a = \overline{BC}$ im Verhältnis $\nu : 1 - \nu$, der Punkt T_b teile die Seite $b = \overline{AC}$ im Verhältnis $\mu : 1 - \mu$, und der Punkt T_c teile die Seite $c = \overline{AB}$ im Verhältnis $\lambda : 1 - \lambda$. Man betrachte nun die Geraden G_a durch A und T_a , G_b durch B und T_b , sowie G_c durch C und T_c . Unter welcher Bedingung an λ, μ und ν schneiden sich diese drei Geraden in einem Punkt?

