Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Probeklausur Lineare Algebra I; 11. Dezember 2009

Name:

Matrikelnummer:

Übungsgruppenleiter:

Punktzahlen aus Aufgabe:

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
Σ	

Allgemeine Hinweise, vor Beginn der Bearbeitung sorgfältig durchzulesen: In den Aufgaben 1 und 2 sind die genauen Formulierungen der Definitionen und Sätze gefragt.

Die Aufgaben 3, 4 und 5 sind multiple choice-Aufgaben. Sie brauchen Ihre Begründung nicht anzugeben. Für jede richtige Antwort bekommen Sie 1 Punkte, für jede falsche Antwort 1 *Minuspunkt*. Die Gesamtpunktzahl aus jeder dieser Aufgaben ist aber in jedem Fall ≥ 0.

Bei den Rechenaufgaben 6, 7 und 8 ist neben dem Endergebnis auch der Lösungsweg gefragt.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf *jedes* Blatt Ihrer Abgabe zu schreiben.

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Geben Sie die Definitionen folgender Begriffe wieder:

1. Was ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$?
2. Wann ist eine Menge von Vektoren $\mathcal{B} \subset V$ linear unabhängig?
3. Wann ist eine Menge von Vektoren $\mathcal{B} \subset V$ eine Basis?
4. Was ist die Dimension von V, falls V endlich erzeugt ist.
5. Was ist der Rang einer linearen Abbildung $f : V \to W$, wenn V und W endlich-dimensional sind?

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Formulieren Sie die beiden folgenden Sätze.

1. Den Basisergänzungssatz und
2. die Dimensionsformel für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset V$ sowie $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\} \subset W$ Basen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

1. Falls $f(a_i) \neq f(a_j)$ für alle $i \neq j$, so ist f injektiv.
2. Falls f injektiv ist, so gilt $f(a_i) \neq f(a_j)$ für alle $i \neq j$.
3. Falls für jedes $j = 1, \ldots, m$ ein $v_j \in V$ mit $f(v_j) = b_j$ existiert, so ist f surjektiv.
4. Falls f surjektiv ist, so existiert für jedes $j = 1, \ldots, m$ ein $v_j \in V$ mit $f(v_j) = b_j$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum $L \subset M \subset V$ Teilmengen. Welche der folgenden Aussagen sind immer richtig und welche sind nicht immer richtig? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

1. Wenn L ein Untervektorraum ist, dann ist auch M ein Untervektorraum.
2. Wenn M ein Untervektorraum ist, dann ist auch L ein Untervektorraum.
3. Wenn L linear unabhängig ist, so ist auch M linear unabhängig.
4. Wenn M linear unabhängig ist, so ist auch L linear unabhängig.
5. Wenn M ein Erzeugendensystem ist, so ist auch L ein Erzeugendensystem.
6. Wenn L ein Erzeugendensystem ist, so ist auch M ein Erzeugendensystem.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ invertierbare Matrizen. Welche der folgenden Aussagen sind immer richtig und welche sind nicht immer richtig? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

1. A^{-1} ist invertierbar.
2. AB ist invertierbar.
3. $A+B$ ist invertierbar.
4. λA ist invertierbar für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.
5. λA ist invertierbar für alle $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 6: (15 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden drei linearen Gleichungssysteme (über $\mathbb{Q}$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 5 \\ 7 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right); \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right); \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -8 \end{array}\right).$$

Hinweis: Sie erleichtern sich die Arbeit, indem Sie ausnutzen, dass die ersten beiden Koeffizientenmatrizen gleich sind.

Aufgabe 7: (12 Punkte)

Es sei $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, wobei f die folgende lineare Abbildung ist:

1. f ist eine Drehung um den Winkel α entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn.
2. $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$ und $f(x) = x - 2\frac{<x,u>}{<u,u>}u$ (f ist also eine Spiegelung)

Aufgabe 8: (10 Punkte)

Es sei $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 und $\mathcal{B}$ die Basis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, wobei $b_1 = 1$, $b_2 = 1-t$, $b_3 = t-t^2$, $b_4 = t^3-t^2$. Geben Sie die Koordinaten $K_{\mathcal{B}}(p)$ des Elementes $p = 1+t+t^2+t^3$ in der Basis $\mathcal{B}$ an.

Aufgabe 9: (15 Punkte)

Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraumes. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. f ist injektiv.
2. f ist surjektiv.
3. f ist bijektiv.

Hinweis: Dimensionsformel

Aufgabe 10: (12 Punkte)

Es seien $f : V \to W$ und $g : W \to Z$ zwei lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen. Zeigen Sie:

1. $\mathrm{rang}(g \circ f) \leq \mathrm{rang}(g)$.
2. $\mathrm{def}(g \circ f) \geq \mathrm{def}(f)$.

Viel Erfolg !