Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Nachklausur Lineare Algebra I
23. März 2010

Name:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:

Aufgabe Nr	Bearbeitet	Punktezahl	Korrektor
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Σ			
Note:			

Allgemeine Hinweise, vor Beginn der Bearbeitung sorgfältig durchzulesen:

Aufgaben 1,2: Geben Sie präzise Definitionen.

Aufgaben 3 und 4: Für jede richtige Antwort gibt es 1 Punkt, für jede falsche Antwort 1 *Minuspunkt*. Die Gesamtpunktzahl jeder dieser Aufgaben ist jedoch in jedem Fall ≥ 0.

Aufgaben 5 und 6: Geben Sie nicht nur das Ergebnis an, sondern auch ihren Lösungsweg.

Aufgaben 7 bis 10: Machen Sie kenntlich, wenn Sie Sätze aus der Vorlesung benutzen.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf *jedes* Blatt Ihrer Abgabe zu schreiben.

Machen Sie auf dem Deckblatt deutlich, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Geben Sie folgende Definitionen wieder:

1. Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.
2. Bidualraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.
3. Produkt zweier Matrizen.
4. Quotientenvektorraum V/U; $U \subset V$ ein Unterraum.
5. Operation einer Gruppe G auf einer Menge X.
6. Annulator eines Unterraumes $U \subset V$.
7. Darstellende Matrix $M_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(f)$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$ bezüglich zweier Basen $\mathcal{A} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V und $\mathcal{B} := \{w_1, \ldots, w_m\}$ von W.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Formulieren Sie folgende Sätze:

1. Den Normalformensatz für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen.
2. Dimensionsformel für den Schnitt zweier Unterräume $U_1, U_2 \subset V$; $U_0 := U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche sind im Allgemeinen falsch? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen; schreiben Sie Ihre Antwort aber bitte auf Ihr eigenes Papier.

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, falls $\det(A) \neq 0$.
2. $\det(A^{-1}) = (-1)^n \det(A)$, falls $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
4. $\det(ABC) = \det(A)\det(C)\det(B)$.
5. $\det(A) = \dim(\mathrm{im}(A)) - \dim(\ker(A))$.
6. $\det(P_\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$, wenn P_σ eine Permutationsmatrix ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche sind im Allgemeinen falsch? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen; schreiben Sie Ihre Antwort aber bitte auf Ihr eigenes Papier.

1. Das Bild eines Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ ist eine Untergruppe von H.
2. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn der Rang von A gleich n ist.
3. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dann ist $\{A^{2k} | k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine Untergruppe.
4. Sind A und B invertierbare Matrizen, so ist auch $A + B$ invertierbar.
5. Der Endomorphismus $f : V \to V$ habe bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ von V die Matrixdarstellung $M_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f) = \lambda\mathbf{1}$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \lambda\mathbf{1}$ für jede Basis $\mathcal{B}$ von V.

6. Hat die Matrixdarstellung $M_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f)$ von $f : V \to V$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ eine Nullspalte, so hat auch $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ für jede Basis $\mathcal{B}$ eine Nullspalte.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Bestimmen Sie Kern und Bild der folgenden Matrix über dem Körper $\mathbb{F}_p$ in Abhängigkeit von der Primzahl p.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{Q})$ invertierbar sind und berechnen Sie die Inversen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Es sei G eine Gruppe, welche auf der Menge X transitiv operiere. Sei $x \in X$ und $G_x \subset G$ die Standgruppe bei x. Es sei $H \subset G$ eine Untergruppe, so dass gilt: H operiert ebenfalls transitiv auf X und $G_x \subset H$. Zeigen Sie, dass $H = G$ ist. Hinweis: für beliebiges $g \in G$ betrachten Sie gx.

Aufgabe 8 (12 Punkte)

Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen. Beweisen Sie, dass $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(f^*)$ gilt. Hinweis: Dimensionsformel. Sie dürfen ohne Beweis oder weitere Erklärung benutzen, dass $\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^o$ gilt und $\dim U^o = \dim V - \dim U$, falls $U \subset V$ ein Unterraum ist.

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Es seien $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$; $B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B).$$

Hinweis: Benutzen Sie den Laplaceschen Entwicklungssatz oder die Leibnizformel in den Spezialfällen $A = \mathbf{1}_n$ oder $B = \mathbf{1}_m$. Schließen Sie auf den allgemeinen Fall mit Hilfe der Gleichung

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10 (12 Punkte)

Es sei $U \subset \mathbb{K}^n$ ein Unterraum. Für jede Teilmenge $I \subset \underline{n} := \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $\pi_I : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^I$ die natürliche Projektion. Zeigen Sie: es existiert eine Menge $I \subset \underline{n}$, so dass die Einschränkung von π_I auf U ein Isomorphismus $\pi_I|_U : U \to \mathbb{K}^I$ ist. Hinweis: der wesentlich Schritt ist es, die folgende Aussage zu zeigen: ist $J \subset \underline{n}$ und $\pi_J|U \to \mathbb{K}^J$ surjektiv, aber nicht injektiv, dann existiert $i \in \underline{n} \setminus J$, so dass $\pi_{J\cup\{i\}}|U \to \mathbb{K}^{J\cup\{i\}}$ immer noch surjektiv ist.

$\boxed{\textbf{Viel Erfolg !}}$