Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Klausur Lineare Algebra I
6. Februar 2010

Name:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:

Aufgabe Nr	Punktezahl	Korrektor
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Σ		
Note:		

Allgemeine Hinweise, vor Beginn der Bearbeitung sorgfältig durchzulesen:

Aufgaben 1,2: Geben Sie präzise Definitionen.

Aufgaben 3 und 4: Für jede richtige Antwort gibt es 1 Punkt, für jede falsche Antwort 1 *Minuspunkt*. Die Gesamtpunktzahl jeder dieser Aufgaben ist jedoch in jedem Fall ≥ 0.

Aufgaben 5 und 6: Geben Sie nicht nur das Ergebnis an, sondern auch ihren Lösungsweg.

Aufgaben 7 bis 10: Machen Sie kenntlich, wenn Sie Sätze aus der Vorlesung benutzen.

Vergessen Sie bitte nicht, Ihren Namen auf *jedes* Blatt Ihrer Abgabe zu schreiben.

Aufgabe 1 (14 Punkte)

Geben Sie folgende Definitionen wieder:

1. Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V
2. Dualraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V
3. Duale Basis zu einer gegebenen Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.
4. Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$.
5. Normalteiler in einer Gruppe G.
6. die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
7. die symmetrische Gruppe S_n.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Formulieren Sie folgende Sätze:

1. Den Basisauswahlsatz.
2. Die Transformationsformel für die Matrizendarstellung einer linearen Abbildung unter Basiswechsel.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $n \geq 2$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig für alle $A, C \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$? Und welche sind im Allgemeinen falsch? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen; dennoch benutzen Sie bitte ein separates Blatt Papier.

1. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
2. $\mathrm{spur}(A + B) = \mathrm{spur}(A) + \mathrm{spur}(B)$.
3. $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(A)\,\mathrm{spur}(B)$.
4. $\mathrm{spur}(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist invertierbar.
5. $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.
6. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche sind im Allgemeinen falsch? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen; dennoch benutzen Sie bitte ein separates Blatt Papier.

1. Das direkte Produkt zweier abelscher Gruppen ist abelsch.
2. Jede additive Untergruppe eines Vektorraumes ist ein Untervektorraum.
3. Ist $\phi : G \to H$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus, so ist ϕ^{-1} ein Gruppenhomomorphismus.
4. Der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist eine Untergruppe.
5. Die symmetrische Gruppe S_n ist abelsch für alle n.
6. Das Bild eines Gruppenhomomorphismus ist ein Normalteiler.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{F}_p$ in Abhängigkeit von der Primzahl p.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Sie müssen hierbei die Elemente $\frac{1}{n} \in \mathbb{F}_p$ nicht explizit berechnen, falls in $\mathbb{F}_p$ gilt $n \neq 0$.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{Q})$ invertierbar sind und berechnen Sie die Inversen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (4+8 Punkte)

Es seien V und W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $f : V \to W$ linear und $f^* : W^* \to V^*$ die duale Abbildung. Ferner sei $U \subset V$ ein Unterraum. Zeigen Sie:

1. $\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^o$ und
2. $\dim(U^o) = \dim(V) - \dim(U)$.

Zur Erinnerung: $\mathrm{im}(f)^o \subset W^*$ ist der Annulator von $\mathrm{im}(f)$. Hinweis für Teil 2: Dimensionsformel.

Aufgabe 8 (12 Punkte)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und m ein Teiler von n. Zeigen Sie: Es existiert eine Untergruppe $H \subset \mathbb{Z}/n$, welche isomorph zu $\mathbb{Z}/m$ ist.

Aufgabe 9 (6+6 Punkte)

Es seien eine Gruppe G, eine Menge X, eine Gruppenoperation von G auf X sowie eine Teilmenge $Y \subset X$ gegeben. Für $y \in Y$ sei $G_y \subset G$ die Standgruppe. Es sei

$$H := \{g \in G |\ \forall y \in Y : g.y \in Y \text{ und } g^{-1}.y \in Y\} \subset G \text{ und } K := \bigcap_{y \in Y} G_y \subset G.$$

Zeigen Sie:

1. H ist eine Untergruppe von G.
2. K ist ein Normalteiler von H (kein Teil der Aufgabe: K ist im Allgemeinen kein Normalteiler von G).

Aufgabe 10 (12 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ linear. Ferner seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V. Zeigen Sie:

$$\det(M_{\mathcal{A},\mathcal{A}}(f)) = \det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)).$$

Das heißt, durch $\det(f) := \det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f))$ kann für den Endomorphismus f eine Determinante definieren.

Viel Erfolg !