Themen für Bachelorarbeiten 2017/18

Prof. Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer

---

(1) **Eine kombinatorische Formel für die Euler-Klasse eines $\mathbb{S}^1$-Bündels**
Für ein orientierbares $\mathbb{S}^1$-Bündel $\pi\colon E \to B$ gibt es eine Kohomologie-Klasse $e(\pi) \in H^2(B;\mathbb{Z})$, die sogenannte Euler-Klasse oder erste Chern-Klasse; sie dient zur Klassifikation solcher Bündel und giebt Auskunft darüber, ob das Bündel kompliziert ist oder nicht; z.B. muss $e(\pi) = 0$ gelten, wenn das Bündel π trivial ist; und über $\mathbb{S}^2$ gibt es für jedes $c \in H^2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$ eine Isomorphieklasse von $\mathbb{S}^1$-Bündeln über $\mathbb{S}^2$.
Die Klasse $e(\pi)$ ist also repräsentiert durch einen Kozykel, also eine Kokette $C \in S^2(B) = \mathrm{Hom}(S_2(B), \mathbb{Z})$ mit $\delta(C) = 0$; hier bezeichnet $S_\bullet(B)$ den (singulären, simplizialen oder zellulären) Kettenkomplex von B, und $S^\bullet(B) = \mathrm{Hom}(S_\bullet(B), \mathbb{Z})$ den dualen Kokettenkomplex von B mit dem Korandoperator δ.
Sind E und B trianguliert und ist π eine simpliziale Abbildung, so gibt es eine 'kombinatorische' Beschreibung der Euler-Klasse, wenn man sie in der rationalen Kohomologie nimmt. Zunächst sind die 1-Simplexe in E in der Faser über einem 0-Simplex in B durch die Orientierung bis auf zyklische Reihenfolge festgelegt; gleiches gilt für die 2-Simplexe $\tilde{\sigma}$ in E über einem 1-Simplex $\sigma = (v_0, v_1)$ in B. Jedes solche $\tilde{\sigma}$ hat genau eine Seite entweder über v_0 (Fall 0) oder über v_1 (Fall 1) liegen. Daraus ergibt sich für die zyklische Menge $(\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_k)$ der 2-Simplexe über σ eine zyklisches Wort $W(\sigma)$ von Nullen und Einsen und der Länge k. Für $W(\sigma)$ definiert man dann einen gewissen Index in $\mathbb{Q}$; eine Randformel für die drei Seiten eines 2-Simplexes ergibt letztendlich einen rationalen 2-Kozykel, also eine Klasse in $H^2(B;\mathbb{Q})$ in der rationalen Kohomologie. (Im Grunde ist dies eine kombinatorische Beschreibung der Krümmung.)
In der Bachelorarbeit soll dieser Kozykels definiert werden und es soll bewiesen werden, dass er die rationale Euler-Klasse definiert. Ausgangspunkt sind die Arbeiten [Mn] und [Ga], die leider nicht gut geschrieben sind. Das Thema verlangt etwas Vorgriff auf die Kohomologie; es hat einen eindeutig kombinatorischen Charakter mit etlichen offenen Fragen.

---

(2) **De Rham-Kohomologie von Mannigmaltigkeiten**
Für eine glatte und orientierbare Mannigfaltigkeit M kann man die sog. de Rham-Kohomologiegruppen $H^q_{\mathrm{dR}}(M)$ definieren. Dazu betrachtet man die q-Differentialformen $\Omega^q(M)$ auf M, für $q = 0, 1, \ldots, m = \dim(M)$. Differentialformen vom Grad 0 sind Funktionen, Differentialformen vom Grad 1 sind Vektorfelder, usw. und eine m-Form ist eine Volumenform. Die äussere Ableitung einer q-Form ist eine $(q + 1)$-Form. So erhält man einen Kokettenkomplex

$$0 \to \Omega^0(M) \to \Omega^1(M) \to \Omega^2(M) \to \ldots \to \Omega^m(M) \to 0$$

von reellen Vektorräumen. Die Kohomologie dieses Homplexes ist die de Rham-Kohomologie $H^*_{\mathrm{dR}}(M)$ vo M.
In der Bachelorarbeit soll die de Rham-Kohomologie definiert und die wichtigsten Eigenschaften hergeleitet werden. Dann soll der klassische Satz bewiesen werden, dass

$$H^*_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^*(M, \mathbb{R})$$

gilt. Als Anleitung dient Kapitel V in dem Buch [Bre]; dort findet man auch interessante Beispiele.

---

(3) **Sätze von Borsuk und Ulam**
Wir gehen aus von dem Begriff des Grades $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ für eine Selbstabbildung $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ einer Sphäre und dem Satz von Hopf, dass $\deg\colon [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist. Es gibt verschiedene Sätze über das Antipodenverhalten von f, die man als Borsuk-Ulam-Sätze bezeichnet. In der Bachelorarbeit sollen einige dieser Sätze bewiesen werden. Als Grundlage kann man das Buch von Granas und Dugundji [G-D] nehmen. Insbesondere soll auch die dort als Übungsaufgabe III.10 (A.5) gestellte Verallgemeinerung des Borsuk-Ulam-Satzes bewiesen werden.

---

(4) **Transfer in H_* für endliche Überlagerungen**
Für eine stetige Abbildung $\zeta\colon \tilde{X} \to X$ haben wir eine induzierte Abbildung $\zeta_*\colon H_*(\tilde{X}) \to H_*(X)$ in der singulären Homologie. Ist ζ eine endliche Überlagerung, so gibt es eine von ζ induzierte sogenannte *Transferabbildung* $\zeta_!\colon H_*(X) \to H_*(\tilde{X})$. Sie ist fast soetwas wie ein Inverses für ζ_*, genauer gesagt gilt $\zeta_* \circ \zeta_! = r\,\mathrm{id}$, wenn r die Blattzahl der Überlagerung ist. (Eine TRansferabbildung gibt es auch für allgemeinere Faserbündel; dafür wird man aber die Kohomologie und die Poincaré-Dualität brauchen.)
In der Bachelorarbeit geht es um die Definition und die Grundeigenschaften des Transfers sowie um einige Anwendungen. Anfangen wird man mit [Bre] und [Ha]. Eine mögliche Anwendung ist: *Sei X ein CW-Komplex mit einer freien und eigentlich-diskontinuierlichen Operation einer diskreten Gruppe G; ist X zusammenziehbar und hat X/G endlichen homologischen Typ, so ist G torsionsfrei.*

---

(5) **Lefschetz-Zahl und Lefscher'scher Fixpunktsatz**
Eine der schönsten Anwendungen der Homologietheorie ist der Fixpunktsatz von Lefschetz. Man definiert zunächst die Lefschetz-Zahl $L(f)$ einer Selbstabbildung $f\colon X \to X$ eines Raumes X mit endlichen-topologischen Typ in der rationalen Homologie als alternierende Summe seiner Spuren:

$$L(f) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{Spur}(f_*\colon H_i(X; \mathbb{Q}) \to H_i(X; \mathbb{Q}))$$

auf allen Homologiegruppen $H_i(X;\mathbb{Q})$. Man sieht sofort, dass $L(\mathrm{id}_X) = \chi(X)$ die Euler-Charakteristik von X ist. Man muss zunächst ein paar weitere grundlegende Eigenschaften beweisen (z.B. die Hopf'sche Spurformel). Für den Fixpunktsatz von Lefschetz benutzen wir den simplizialen Approximationssatz: Jede Abbildung zwischen endlichen simplizialen Komplexen ist homotop zu einer simplizialen Abbildung (die also q-Simplexe in q-Simplexe abbildet). Der Fixpunktsatz lautet dann: *Ist $L(f) \neq 0$, so hat f einen Fixpunkt.* Da $L(f) = 1$ gilt für jede Selbstabbildung eines zusammenziehbaren Raumes, ist das allgemeiner als der Brouwer'sche Fixpunktsatz.
Vorlage für die Bachelorarbeit sind die Abschnitte in [Bre].

Literatur

[Bre] Glen E. Bredon: *Topology and Geometry.* Springer Verlag, Grad. Texts in Math. vol 139.

[Ga] Gauram Gangopadhyay: *Counting triangles formula for the first Chern class of a circle bundle.* ArXiv:1712.03024v1 (2017).

[G-D] Andrzej Granas - James Dugundji: *Fixed Point Theory.* Springer Verlag (2003).

[Ha] Allen Hatcher: *Algebraic Topology.* Cambridge University Press (2002).

[Mn] N. Nikolai Mnev: *A local formula for the Chern class of a triangulated $\mathbb{S}^1$-bundle in terms of shellings.* ArXiv:1108.4733v2 (2011).

Mathematisches Institut
Universität Bonn
Endenicher Allee 60
D - 53115 Bonn, Germany
email: cfb@math.uni-bonn.de