Produkt in der deRham-Kohomologie und $\mathbb{C}\mathbf{P}^{\mathbf{n}}$

Hauptseminar deRham-Kohomologie
Alma Hummelsheim

1 Der Kohomologiering

Erinnerung: Das äußere Produkt der Differentialformen ist definiert wie folgt:

$$\Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \to \Omega^{p+q}(M)$$
$$(\omega, \gamma) \mapsto \omega \wedge \gamma$$

wobei

$$(\omega \wedge \gamma)_x := \omega_x \wedge \gamma_x$$

Dieses Produkt erfüllt folgende Eigenschaften:

1. graduierte Kommutativität: $\omega \wedge \gamma = (-1)^{pq} \gamma \wedge \omega$, für $\omega \in \Omega^p(M)$ und $\gamma \in \Omega^q(M)$
2. Existenz eines neutralen Element: $\mathbf{1} \in \Omega^0(M)$
3. Bilinearität
4. Bei Anwendung des äußeren Differential gilt die graduierte Leipniz Regel:
   $d(\omega \wedge \gamma) = d\omega \wedge \gamma + (-1)^p \omega \wedge d\gamma$, für $\omega \in \Omega^p(M)$ und $\gamma \in \Omega^q(M)$

Damit lässt sich auch ein äußeres Produkt auf den Kohomologiegruppen definieren.

Definition 1.1: Das äußere Produkt der dRham-Kohomologie

$$H^p_{dR}(M) \times H^q_{dR}(M) \to H^{p+q}_{dR}(M)$$
$$([\omega], [\gamma]) \mapsto [\omega] \cdot [\gamma] := [\omega \wedge \gamma]$$

Achtung: Wir müssen Wohldefiniertheit prüfen.

1. $\omega \wedge \gamma \in H^{p+q}_{dR}(M)$:
   $\omega \wedge \gamma$ ist eine $(p+q)$-Form. Nach der graduierten Leibniz-Regel gilt für geschlossene Formen:
   $$d(\omega \wedge \gamma) = \underbrace{d\omega}_{=0} \wedge \gamma + (-1)^p \omega \wedge \underbrace{d\gamma}_{=0} = 0$$
2. $[\omega] = [\omega'] \text{ und } [\gamma] = [\gamma'] \implies [\omega \wedge \gamma] = [\omega' \wedge \gamma']$:
   Sei $\omega \sim \omega'$. Dann unterscheiden sich die Formen nur um einen Korand: $\omega' - \omega = d\alpha$ Für ein $\alpha \in H^{p-1}_{dR}(M)$ Dann gilt:
   $$\omega \wedge \gamma = (\omega' - d\alpha) \wedge \gamma = \omega' \wedge \gamma - d\alpha \wedge \gamma$$

also:

$$(\omega' \wedge \gamma) - (\omega \wedge \gamma) = d\alpha \wedge \gamma = d(\alpha \wedge \gamma) - (-1)^{p-1}\alpha \wedge \underbrace{d\gamma}_{=0} = d(\alpha \wedge \gamma)$$

$\implies$ $[\omega \wedge \gamma] = [\omega' \wedge \gamma]$. Der andere Fall folgt analog. $\square$

Definition 1.2: Der Kohomologiering
Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wir definieren den Kohomologiering von M als:

$$H^*_{dR}(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{dR}(M) = H^0_{dR}(M) \oplus ... \oplus H^n_{dR}(M)$$

wobei die Multiplikation durch das äußere Produkt gegeben ist.

Definition 1.3: Graduierter Ring
Ein graduierter Ring A ist ein Ring, der eine Darstellung als direkte Summe von abelschen Gruppen hat:

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$$

sodas $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$. Elemente von A_j werden homogene Elemente vom Grad j genannt.

Beispiele: Polynomringe und die äußere Algebra $\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Lambda^k(V)$ sind graduierte Ringe.

Bemerkung 1.4: Der Kohomologiering ist ein graduiert kommutativer graduierter Ring mit neutralem Element.
Das folgt direkt aus den Eigenschaften des äußeren Produkt auf Differentialformen. Das neutrale Element ist die 0-Kohomologieklasse der konstanten Funktion $[\mathbf{1}] \in H^0_{dR}(M)$.

Beispiele:

- $H^*_{dR}(\text{pt.}) \cong \mathbb{R}$. Die Multiplikation, die wir auf dem Kohomologiering definiert haben stimmt hier mit der Multiplikation auf $\mathbb{R}$ überein.
- $H^*_{dR}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{R}[c]/(c^2)$, wobei c (mit $|c| = n-1$) ein Erzeuger in $H^{n-1}_{dR}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ ist. Für den Spezialfall $n = 2$ hatten wir in Tom Finkens Vortrag gesehen dass ein Erzeuger durch $c = [\omega]$ mit $\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ gegeben ist.

Im Folgenden betrachten wir den komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$.

2 Der komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$

Definition 2.1: $\mathbb{C}P^n$

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/z \sim \lambda z \qquad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$$

wobei $\mathbb{C}P^n$ mit der Quotiententopologie bezüglich $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ versehen ist.

Satz 2.2: $\mathbb{C}P^n$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit

Beweis: Die Quotientenabbildung p ist abgeschlossen. $\mathbb{C}P^n$ ist also Hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis. Wir betrachten

$$U_j := \{[z_0 : ... : z_n] \in \mathbb{C}P^n | \, z_j \neq 0\}$$

Die Menge $(U_j)_{j=0,..,n}$ bildet eine offene Überdeckung. Definiere:

$$h_j : U_j \to \mathbb{C}^n, \;\; [z_0 : ... : z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_j}, ..., \frac{\widehat{z_j}}{z_j}, ..., \frac{z_n}{z_j} \right)$$

diese Abbildung ist wohldefiniert und surjektiv, mit Umkehrung:

$$h_j^{-1} : \mathbb{C}^n \to U_j, \;\; (z_1, ..., z_n) \mapsto [z_1 : ... : 1 : ... : z_n]$$

Als Übergangsabbildungen erhalten wir $h_k \circ h_j^{-1} : h_j(U_k \cap U_j) \to h_k(U_k \cap U_j)$ wobei komponentenweise z_l auf z_l/z_m oder $1/z_m$ abbgebildet wird, mit $z_m \neq 0$.
Indem wir $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ identifizieren erhalten wir $U_j \cong \mathbb{R}^{2n}$ glatt. Also ist $\mathbb{C}P^n$ eine reelle Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$. □

Bemerkung 2.3: Die Übergangsabbildungen sind nicht nur glatt, sondern auch holomorph. $\mathbb{C}P^n$ ist also sogar eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Lemma 2.4: $\mathbb{C}P^n$ ist kompakt und orientierbar.

Beweis: Wir können eine abgeschlossene Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ von der kompakten Sphäre definieren.

$$\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n, \quad (z_0, ..., z_n) \mapsto [z_0 : ... : z_n]$$

hierbei wird $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$ als Teilmenge des $\mathbb{C}^{n+1}$ aufgefasst.
Die Orientierbarkeit folgt daraus, dass die Übergangsabbildungen orientierungserhaltend sind. □.

Nun wollen wir die Kohomologie von $\mathbb{C}P^n$ bestimmen. Dafür brauchen wir folgenden Satz:

Satz 2.5: Lange exakte Sequenz mit Komplementen
Sei (M, M_0) ein Paar kompakter glatter Mannigfaltigkeiten. M_0 ist also eine Untermannigfaltigkeit von M und insbesondere auch abgeschlossen. Betrachte die Inklusionen:

$$i : (M \setminus M_0) \hookrightarrow M, \quad j : M_0 \hookrightarrow M$$

Dann existiert eine lange exakte Sequenz:

$$... \to H^{q-1}_{dR}(M_0) \xrightarrow{\delta} H^q_{dR,c}(M \setminus M_0) \xrightarrow{i_*} H^q_{dR}(M) \xrightarrow{j^*} H^q_{dR}(M_0) \to ...$$

Beweis:
Auf Übungsblatt 3 hatten wir gesehen, dass wir für ein Paar glatter Mannigfaltigkeiten (M, M_0) folgende exakte Sequenz erhalten:

$$... \to H^{q-1}_{dR}(M_0) \xrightarrow{\delta'} H^q_{dR}(M, M_0) \to H^q_{dR}(M) \xrightarrow{j^*} H^q_{dR}(M_0) \to ...$$

Wir müssen also nur einen Isomorphismus zwischen $H^q_{dR}(M, M_0)$ und $H^q_{dR,c}(M \setminus M_0)$ finden.
Das Bild der induzierten Abbildung $i_* : \Omega^q_c(M \setminus M_0) \to \Omega^q_c(M)$ liegt in $\Omega^q(M, M_0)$.

$$i_*(\omega)|_{M\setminus M_0} = \omega, \qquad i_*(\omega)|_{M_0} = 0$$

Zu zeigen ist, dass $i_* : \Omega^q_c(M \setminus M_0) \to \Omega^q(M, M_0)$ einen Isomorphismus $H^q(i_*) : H^q_{dR,c}(M \setminus M_0) \to H^q_{dR}(M, M_0)$ in der Kohomologie induziert.

Hilfslemma 2.5.1: Tubulare Umgebungen
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann existiert eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Retraktion $r : V \to M$ mit $r|_M = Id_M$. Die Inklusion $i : M \hookrightarrow V$ induziert dann einen Isomorphismus $H^q_{dR}(i) : H^q_{dR}(V) \to H^q_{dR}(M)$.

Beweis: Ausgelassen. In [M-T, 9] zu finden.

Hilfslemma 2.5.2:

1. Sei $\omega \in \Omega^q(M_0)$ geschlossen. Dann existiert eine q-Form $\tau \in \Omega^q(M)$ so dass $j^*(\tau) = \omega$ und $d\tau = 0$ auf einer offenen Umgebung von M_0 in M.

2. Sei $\tau \in \Omega^q(M)$ mit $\mathrm{supp}_M(d\tau) \cap M_0 = \emptyset$ und $j^*(\tau)$ exakt. Dann existiert eine (q-1)-Form $\sigma \in \Omega^{q-1}(M)$ so dass $\tau - d\sigma = 0$ auf einer offenen Umgebung von M_0 in M.

Beweis:
Mit dem Whitney-Theorem aus Vortrag 1 können wir M als glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$ betrachten. Mit Hilfslemma 2.5.1 kriegen wir die Retraktionen (V_M, i_M, r_M) und $(V_{M_0}, i_{M_0}, r_{M_0})$ mit $V_{M_0} \subseteq V_M$.
Wähle $\varphi : M \to [0, 1]$ mit $\mathrm{supp}(\varphi)_M \subseteq M \cap V_{M_0}$ und $\varphi = 1$ auf einer offenen Menge $W \subseteq M \cap V_{M_0}$ mit $M_0 \subseteq W$.

Sei $\omega \in \Omega^q(M_0)$ geschlossen. Setze $\tilde{\omega} = r^*_{M_0}(\omega)|_M \in \Omega^q(M \cap V_{M_0})$ und definiere $\tau \in \Omega^q(M)$ als $\tau(x) = \varphi\tilde{\omega}$ für $x \in V_{M_0}$ und sonst $\tau = 0$. Dann gilt $j^*(\tau) = \varphi\tilde{\omega}|_{M_0} = \omega$ und $d\tau|_W = 0$.

Sei $\tau \in \Omega^q(M)$ mit $\mathrm{supp}_M(d\tau) \cap M_0 = \emptyset$ und $j^*(\tau)$ exakt. Setze $\tilde{\tau} = r^*_M(\tau)|_{V_{M_0}} \in \Omega^q(V_{M_0})$. Dann gilt $dr^*_M(\tau) = r^*_M(d\tau) = 0$ auf einer Umgebung von M_0, da $\mathrm{supp}_M(d\tau) \cap M_0 = \emptyset$. Wir verkleinern gegebenenfalls V_{M_0} so dass $d\tilde{\tau}|_{V_{M_0}} = 0$. Es gilt, dass $i^*_{M_0}(\tilde{\tau}) = j^*(\tau)$ also ist $i^*_{M_0}(\tilde{\tau})$ exakt in $\Omega^q(M_0)$. Mit Hilfslemma 2.5.1 ist $\tilde{\tau}$ auch exakt in $\Omega^q(V_{M_0})$. Daraus folgt, dass auch $\tau|_{M\cap V_{M_0}}$ exakt ist. Wähle also $\sigma_0 \in \Omega^{q-1}(M \cap V_{M_0})$ mit $d\sigma_0 = \tau|_{M\cap V_{M_0}}$ und definiere $\sigma \in \Omega^{q-1}(M)$ als $\varphi\sigma_0$ auf $M \cap V_{M_0}$ und als 0 sonst. Dann ist $\tau - d\sigma|_W = 0$ □

Beweis von Satz 2.5:

1. **Injektivität:** Sei $[\omega] \in \mathrm{Ker}(H^q(i_*))$ mit Repräsentanten $\omega \in \Omega^q_c(M \setminus M_0)$ dann ist $i_*(\omega) = d\tau$ für ein $\tau \in \Omega^{q-1}(M, M_0)$. Da $j^*(\tau) = 0$ und $\mathrm{supp}_M(d\tau) = \mathrm{supp}_M(i_*(\omega)) \subseteq (M \setminus M_0)$ erhalten wir mit Anwendung von Hilfslemma 2.5.2 2. ein $\sigma \in \Omega^{q-2}(M)$ sodass $\tau - d\sigma = 0$ auf einer offenen Umgebung von M_0. Damit existiert $\kappa = (\tau - d\sigma)|_{M\setminus M_0} \in \Omega^{q-1}_c$ mit $d\kappa = d\tau|_{M\setminus M_0} = \omega$.

2. **Surjektivität:** Sei $[\omega] \in H^q_{dR}(M, M_0)$ mit Repräsentanten $\omega \in \Omega^q(M, M_0)$ geschlossen. Mit Hilfslemma 2.5.2 2. wählen wir erneut ein $\sigma \in \Omega^{q-1}(M)$ sodass $\omega - d\sigma = 0$ auf einer offenen Umgebung von M_0.

Es gilt $d(j^*(\sigma)) = j^*(d(\sigma)) = j^*(\omega) = 0$ ($j^*(\sigma)$ ist geschlossen). Wir finden also mit 2.5.2 1. ein $\tau \in \Omega^{q-1}(M)$ mit $j^*(\tau) = j^*(\sigma)$ so dass $d\tau$ auf einer offenen Umegbung von M_0 verschwindet. Also gilt $\sigma - \tau \in \Omega^{q-1}(M, M_0)$, und für $\kappa := (\omega - d(\sigma-\tau))|_{M\setminus M_0} = (\omega - d\sigma)|_{M\setminus M_0} + d\tau|_{M\setminus M_0} \in \Omega^q_c(M \setminus M_0)$. Somit ist $[\omega] = [\omega - d(\sigma - \tau)] = H^q(i_*)[\kappa]$ □

Satz 2.6: Die additive Struktur der Kohomologie von $\mathbb{C}P^n$ ist

$$\begin{aligned} H^{2k}_{dR}(\mathbb{C}P^n) &= \mathbb{R}, \qquad 0 \le k \le n \\ H^k_{dR}(\mathbb{C}P^n) &= 0, \qquad \text{sonst} \end{aligned}$$

Beweis

Wir verwenden die Sequenz von oben mit $M = \mathbb{C}P^n$, $M_0 = \mathbb{C}P^{n-1}$ und $j : \mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$. Dann ist $M \setminus M_0 = U_n \cong \mathbb{R}^{2n}$ und wir erhalten

$$... \to H^q_c(\mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{i_*} H^q(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{j^*} H^q(\mathbb{C}P^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}_c(\mathbb{R}^{2n}) \to ...$$

Im letzten Vortrag hatten wir gesehen, dass $H^q_c(\mathbb{R}^{2n}) = \mathbb{R}$ genau dann wenn $q = 2n$ und sonst 0. Induktiv können wir jetzt die Kohomologiegruppen bestimmen. Wir nehmen erstmal an der Satz gelte für $\mathbb{C}P^{n-1}$.

1. $q = 2k, \quad 0 \le k \le n-1$

   $$... \to 0 \xrightarrow{i_*} H^q_{dR}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{j^*} \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} 0 \to ...$$

   $\implies$ j^* ist ein Isomorphismus und $H^q_{dR}(\mathbb{C}P^n) = H^q_{dR}(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{R}$

2. $q = 2n$

   $$\to 0 \xrightarrow{\delta} \mathbb{R} \xrightarrow{i_*} H^q_{dR}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{j^*} 0 \xrightarrow{\delta} ...$$

   $\implies$ i_* ist ein Isomorphismus und $H^q_{dR}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}$

3. $q > 2n \implies H^q_{dR}(\mathbb{C}P^n) = 0$ aus Dimensionsgründen

4. $q = 2k+1, \quad 0 \le k \le n-1$

   $$... \xrightarrow{\delta} 0 \xrightarrow{i_*} H^q_{dR}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{j^*} 0 \to ...$$

   $\implies H^q_{dR}(\mathbb{C}P^n) = 0$

Den Induktionanfang kriegen wir direkt durch $H^q_{dR}(\mathbb{C}P^0) = H^q_{dR}(\text{pt.})$ □

Satz 2.7: Der multiplikative Struktur des Kohomologiering von $\mathbb{C}P^n$ ist gegeben durch

$$H^*_{dR}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}[c]/(c^{n+1}) \qquad |c| = 2$$

wobei c eine erzeugende Klasse in $H^2_{dR}(\mathbb{C}P^n)$ ist.

Beweis

Wir wollen wieder eine Induktion über n durchführen. Sei also der Satz für $\mathbb{C}P^{n-1}$ bewiesen.
Im Beweis Oben hatten wir gesehen, dass $j : \mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ auf den Kohomologiegruppen einen Isomorphismus $j^* : H^k_{dR}(\mathbb{C}P^n) \to H^k_{dR}(\mathbb{C}P^{n-1})$ induziert für $0 \le k \le 2n-2$.
Ein Erzeuger c' von $H^2_{dR}(\mathbb{C}P^{n-1})$ wird also auf einen Erzeuger $c \in H^2_{dR}(\mathbb{C}P^n)$ abgebildet und es

folgt, dass $c^k \neq 0$ in $H^{2k}_{dR}(\mathbb{C}P^n)$ für $k \leq n-1$.
Um zu zeigen, dass c^n nicht trivial ist, verwenden wir die Poincaré Dualität. Damit gilt dann:

$$D^2_{\mathbb{C}P^n} : H^2_{dR}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\cong} H^{2n-2}_{dR}(\mathbb{C}P^n)^*$$

$c \in H^2_{dR}(\mathbb{C}P^n)$ ist nicht trivial, es gilt also $D^2_{\mathbb{C}P^n}(c) \neq 0$. Da wie oben gesehen $c^{n-1} \neq 0$ in $H^{2n-2}_{dR}(\mathbb{C}P^n)$ folgt dann

$$\int_{\mathbb{C}P^n} c \wedge c^{n-1} \neq 0 \text{ also auch } 0 \neq c^n \in H^{2n}_{dR}(\mathbb{C}P^n)$$

Den Induktionsanfang kriegen wir mit $\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$. □

3 Ein Erzeuger von $H^2_{dR}(\mathbb{C}P^n)$

Jetzt kann man sich natürlich fragen wie ein solcher Erzeuger c aussieht. Dafür brauchen wir erst noch einige andere Beobachtungen.

Lemma 3.1

1. Für $p \in \mathbb{C}P^n$ und $v \in \pi^{-1}$(p) existiert eine offene Umgebung U und eine glatte Abbildung $s : U \to \mathbb{S}^{2n+1}$ sodass $s(p) = v$ und $\pi \circ s = id|_U$
2. Für $v \in \mathbb{S}^{2n+1}$ und $p = \pi(v)$ induziert das Differential $D_v\pi$ einen $\mathbb{R}$-linearen Isomorphismus von $(\mathbb{C}v)^\perp$ nach $T_p\mathbb{C}P^n$
3. Auf $T_p\mathbb{C}P^n$ existiert eine wohldefinierte Struktur als n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Der Isomorphismus in 2. wird damit zu einer $\mathbb{C}$-linearen Isometrie.

Beweis

1. Wähle $U = U_j$ sodass $p \in U_j$. Definiere $s_j : U_j \to \mathbb{S}^{2n+1},\ [z_0 : ... : z_n] \mapsto \left(\sum_{k=0}^n |z_k|^2\right)^{-1/2} (z_0, ..., z_n)$ mit $z_j = 1$. Setzte $\lambda := v/s_j(p) \in \mathbb{S}^1$ und $s := \lambda s_j$.
2. Aus 1. folgt, dass $D_v\pi : T_v\mathbb{S}^{2n+1} \to T_p\mathbb{C}P^n$ surjektiv ist, da $D_v\pi \circ D_ps = id_{T_p\mathbb{C}P^n}$. Mit Dimensionformel folgt, dass $\dim_\mathbb{R}(\mathrm{Ker}(D_p\pi)) = 1$. Der Weg $\gamma : (-1, 1) \to \mathbb{S}^{2n+1},\ \gamma(t) = ve^{it}$ liegt im Kern dieser Abbildung, da $\pi(e^{it}v) = [e^{it}v] =$ konst. Definiere den Isomorphismus:

   $$\phi : T_v\mathbb{S}^{2n+1} \to \left\{w \in \mathbb{C}^{n+1} | \mathrm{Re}\langle w, v\rangle = 0\right\}, \quad [\alpha] \mapsto \frac{d}{dt}\alpha|_{t=0}$$

   Es gilt $\left\{w \in \mathbb{C}^{n+1} | \mathrm{Re}\langle w, v\rangle = 0\right\} = (\mathbb{C}v)^\perp \oplus \mathrm{span}_\mathbb{R}(iv)$ und $\phi(\gamma) = iv$. Damit folgt $T_v\mathbb{S}^{2n+1}/\mathrm{span}_\mathbb{R}(iv) \cong (\mathbb{C}v)^\perp \cong T_p\mathbb{C}P^n$.
3. Auf $T_p\mathbb{C}P^n$ lässt mittels $D_v\pi$ die Vektorraumstruktur sowie das Skalarprodukt von $(\mathbb{C}v)^\perp$ übernehmen. Für $\xi_1, \xi_2 \in T_p\mathbb{C}P^n$ mit Urbildern $w_1, w_2 \in (\mathbb{C}v)^\perp, \mu \in \mathbb{C}$:

   $$\mu \cdot \xi_1 := D_v\pi(\mu w_1), \quad \langle \xi_1, \xi_2\rangle := \langle w_1, w_2\rangle$$

   Zu prüfen ist die Wohldefiniertheit.
   Betrachte den Diffeomoprhismus $\phi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1},\ x \mapsto \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Das folgende

Diagramm kommutiert dann:

$$\begin{tikzcd} T_v\mathbb{S}^{2n+1} \arrow[rr, "D_v\phi"] \arrow[dr, "D_v\pi"'] & & T_{\lambda v}\mathbb{S}^{2n+1} \arrow[dl, "D_{\lambda v}\pi"] \\ & T_p\mathbb{C}P^n & \end{tikzcd}$$

und es gilt $\langle \lambda w_1, \lambda w_2 \rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$. □

Notation: Für $\mathbb{C}$-Vektorraum V definiert rV den zugrundeliegenden $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $F : V \to W$ induziert eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $rF : rV \to rW$

Lemma 3.2 Sei V eine endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $F : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Dann gilt: $\det(rF) = |\det F|^2$

Beweis per Induktion über $m = \dim_{\mathbb{C}}(V)$. □

Korollar 3.3: Sei V ein m-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, ..., b_m\}$. Dann ergibt sich auf rV mit der reellen Basis $rB = \{b_1, ib_1, ..., b_m, ib_m\}$ eine natürliche Orientierung.

Beweis:
Sei $\{b'_1, ..., b'_m\}$ eine beliebige andere Basis von V. Sei F definiert durch $F(b_i) = b'_i$ Dann ist mit Korollar 3.2 $\det(rF) > 0$ also sind $\{b'_1, ib'_1, ..., b'_m, ib'_m\}$ und $\{b_1, ib_1, ..., b_m, ib_m\}$ gleich orientiert. □

Proposition 3.4: Sei V ein m-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\big\langle \cdot, \cdot \big\rangle$. Dann gilt

1. $g(v_1, v_2) := \mathrm{Re}\big\langle v_1, v_2 \big\rangle$ definiert ein Skalarprodukt auf rV und $\omega(v_1, v_2) := -\mathrm{Im}\big\langle v_1, v_2 \big\rangle$ definiert ein Element in $\Lambda^2(rV^{\#})$

2. Sei vol $\in \Lambda^{2m}(rV^{\#})$ das Volumenelement gegeben durch g und der Standard-Orientierung aus Korollar 3.3., also $\mathrm{vol}_g = \sqrt{G(v_1, ..., v_{2m})}\, v_1^{\#} \wedge ... \wedge v_{2m}^{\#}$, wobei $\{v_1, ..., v_{2m}\}$ eine Basis von rV (orientiert wie in 3.3) darstellt mit dualer Basis$\{v_1^{\#}, ..., v_{2m}^{\#}\}$ und

$$G(v_1, ..., v_{2m}) = \det \begin{pmatrix} g(v_1, v_1) & \cdots & g(v_1, v_{2m}) \\ \vdots & & \vdots \\ g(v_{2m}, v_1) & \cdots & g(v_{2m}, v_{2m}) \end{pmatrix}$$

(Die Volumenform ist dann bis auf Orientierung unabhängig von gewählter Basis.) Dann gilt $\omega^m = m!\mathrm{vol}$.

Beweis:

1. Positiv-definitheit und $\mathbb{R}$-Bilinearität haben wir direkt und $g(v_1, v_2) = \overline{g(v_2, v_1)} = g(v_2, v_1)$. Es gilt $\omega(v, v) = -\mathrm{Im}\big\langle v, v \big\rangle = 0$ und die Bilinearität folgt aus der Bilinearität von $\big\langle \cdot, \cdot \big\rangle$.

2. Sei $\{b_1, ..., b_m\}$ eine orthonormale Basis bezüglich $\big\langle \cdot, \cdot \big\rangle$. Wir erhalten $\{b_1, ib_1, ..., b_m, ib_m\}$ als positiv orientierte orthonormale Basis von rV bezüglich $g(\cdot, \cdot)$. Sei $\{\epsilon_1, \tau_1, ..., \epsilon_m, \tau_m\}$ die dazu duale Basis von $\Lambda^1(rV^{\#}) = rV^{\#}$. Es gilt $\omega(b_j, ib_j) = 1$, $\omega(ib_j, b_j) = -1$ und $\omega = 0$ für alle anderen Paare, also folgt

$$\omega(x, y) = \sum_{k=1}^{m} (\epsilon_k \wedge \tau_k)(x, y) = \sum_{k=1}^{m} (\epsilon_k(x)\tau_k(y) - \epsilon_k(y)\tau_k(x))$$

Es gilt $\text{vol} = \epsilon_1 \wedge \tau_1 \wedge ... \wedge \epsilon_m \wedge \tau_m$ und $\omega^m = (\epsilon_1 \wedge \tau_1 + ... + \epsilon_m \wedge \tau_m)^m = m!\text{vol}$. $\square$

Bemerkung 3.5: Für $V = \mathbb{C}^{n+1}$ mit Standard Basis und standard Skalarprodukt gilt

$$\omega = \sum_{k=0}^{n} dx_k \wedge dy_k =: \omega_{\mathbb{C}^{n+1}} \quad \in \Omega^2(r\mathbb{C}^{n+1})$$

wobei x_j und y_j reelle und imaginäre Komponente von $z_j \in \mathbb{C}$ sind.

Jetzt lässt sich Proposition 3.4 auf $T_p\mathbb{C}P^n$ mit der komplexen Vektorraumstruktur aus Lemma 3.1 anwenden. Wir erhalten für jedes $p \in \mathbb{C}P^n$ ein relles Skalarprodukt g_p auf $T_p\mathbb{C}P^n$ und ein $\omega_p \in \Lambda^2(T_p^{\#}\mathbb{C}P^n)$.

Satz 3.6: $\omega := (\omega_p)_{p\in\mathbb{C}P^n}$ definiert eine geschlossene 2-Form auf $\mathbb{C}P^n$ und es gilt $\omega^n = n!\text{vol}_{\mathbb{C}P^n}$.

Beweis:
Sei $p \in \mathbb{C}P^n$ und $v \in \mathbb{S}^{2n+1}$ mit $\pi(v) = p$. Wähle s als lokale Umkehrung wie im Lemma 3.1 also $\pi \circ s = id|_U$ und $s(p) = v$. Ziel ist es zu zeigen, dass

$$\omega|_U = s^*(\omega_{\mathbb{C}^{n+1}})$$

Aus der Darstellung in Bemerkung 3.5 folgt dann

$$d\omega|_U = ds^*(\omega_{\mathbb{C}^{n+1}}) = 0 \quad \text{da} \quad d\omega_{\mathbb{C}^{n+1}} = 0$$

Seien $\xi_1, \xi_2 \in T_p\mathbb{C}P^n$ und $D_ps(\xi_i) = t_i + u_i$ wobei $u_i \in (\mathbb{C}v)^\perp$ und $t_i \in \text{span}_\mathbb{R}(iv)$. Dann gilt:

$$\xi_i = D_v\pi \circ D_ps(\xi_i) = D_v\pi(t_i + u_i) = D_v\pi(u_i)$$

Beobachte, dass $\omega_p(D_v\pi(.), D_v\pi(.))$ genau die Einschränkung von $\omega_{\mathbb{C}^{n+1}}(v)$ auf $r(\mathbb{C}v)^\perp$ ist, also $\omega_p(\xi_1, \xi_2) = \omega_{\mathbb{C}^{n+1}}(u_1, u_2)$. Wir erhalten dann:

$$s^*(\omega_{\mathbb{C}^{n+1}})(\xi_1, \xi_2) = \omega_{\mathbb{C}^{n+1}}(D_ps(\xi_1), D_ps(\xi_2)) = \omega_{\mathbb{C}^{n+1}}(t_1 + u_1, t_2 + u_2)$$
$$= \omega_{\mathbb{C}^{n+1}}(t_1, t_2) + \omega_{\mathbb{C}^{n+1}}(u_1, u_2) + \omega_{\mathbb{C}^{n+1}}(t_1, u_2) + \omega_{\mathbb{C}^{n+1}}(u_1, t_2) = \omega_{\mathbb{C}^{n+1}}(u_1, u_2)$$

da t_1, t_2 linear abhängig und jeweils orthogonal zu den u_i. Damit ist die erste Aussage gezeigt. Es folgt die Glattheit von ω aus der Glattheit des Schnitts und von $\omega_{\mathbb{C}^{n+1}}$. Damit ist auch die Abbildung $p \mapsto g_p$ glatt, da $g_p(\xi_1, \xi_2) = -\omega_p(i\xi_1, \xi_2)$ und wir haben eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Gleichheit $\omega^n = n!\text{vol}_{\mathbb{C}P^n}$ folgt direkt aus Proposition 3.4. $\square$

Satz 3.7: Die geschlossene Form auf $\mathbb{C}P^n$ aus Satz 3.6 ist ein Basiselement für den Kohomologiering.

Beweis:
Die Volumenform $\text{vol}_{\mathbb{C}P^n}$ in $H^{2n}_{dR}(\mathbb{C}P^n)$ ist nicht trivial. Angenommen es existiert ein $\eta \in \Omega^{2n-1}(\mathbb{C}P^n)$ mit $d\eta = \text{vol}_{\mathbb{C}P^n}$. Dann folgt mit Satz von Stokes:

$$\int_{\mathbb{C}P^n} \text{vol}_{\mathbb{C}P^n} = \int_{\mathbb{C}P^n} d\eta = \int_{\partial\mathbb{C}P^n} \eta = 0$$

$\text{vol}_{\mathbb{C}P^n}$ ist aber überall positiv und erfüllt somit $\int_{\mathbb{C}P^n} \text{vol}_{\mathbb{C}P^n} > 0$. Also ist $\text{vol}_{\mathbb{C}P^n}$ nicht exakt. In Satz 3.6 hatten wir gesehen, dass

$$[\omega]^n = n![\text{vol}_{\mathbb{C}P^n}]$$

Also ist $[\omega]^n \neq 0$ und auch $[\omega]^k \neq 0$, $0 \leq k \leq n$ und wir haben unseren Erzeuger! $\square$

Literatur:

[M-T]: I. Madsen, J. Tornehave From Calculus to Cohomology. Cambridge University Press (1978).
(1982).