

Seminar deRham-Kohomologie: Poincaré-Dualität

Luis Moeselagen

August 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation	2
1.1 Beispiele	2
1.2 Gegenbeispiele	2
2 Orientierbarkeit und Orientierung einer Mannigfaltigkeit	4
2.1 Orientierung von Vektorräumen	4
2.2 Orientierbare Mannigfaltigkeiten	4
2.2.1 Beispiele	9
3 Poincaré-Dualität	11
3.1 deRham-Kohomologie mit kompakten Trägern	11
3.2 Konstruktion der Abbildung / Aussage	13
3.3 Beweis	14
3.4 Anwendungen	18

Kapitel 1

Motivation

1.1 Beispiele

- Der **Punkt** $\{*\}$:

$$H^k(\{*\}; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} 0 & ; k < 0 \\ \mathbb{R} & ; k = 0 \\ 0 & ; k > 0 \end{cases}$$

- Die **n -Sphäre** S^n ($n \geq 1$):

$$H^k(S^n; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} 0 & ; k < 0 \\ \mathbb{R} & ; k = 0 \\ 0 & ; 0 < k < n \\ \mathbb{R} & ; k = n \\ 0 & ; k > n \end{cases}$$

Vgl. Theorem 6.13 aus „6. HOMOTOPY“^[1]

- Der **2-Torus** T :

$$H^k(T; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} 0 & ; k < 0 \\ \mathbb{R} & ; k = 0 \\ \mathbb{R}^2 & ; k = 1 \\ \mathbb{R} & ; k = 2 \\ 0 & ; k > 2 \end{cases}$$

Bei diesen Beispielen fällt auf, dass sich die Kohomologie gewisser Mannigfaltigkeiten symmetrisch gegenüber der Dimension der Mannigfaltigkeit verhält, d. h. $H^p(M^n; \mathbb{R}) \cong H^{n-p}(M^n; \mathbb{R})$.

Die **Poincaré-Dualität** formalisiert eben diese Symmetrie für eine ausgewählte Klasse von Mannigfaltigkeiten – die Aussage die hier gezeigt werden soll lautet:

$H^p(M) \cong H_c^{n-p}(M)^*$ für orientierbare glatte n -Mannigfaltigkeiten M

1.2 Gegenbeispiele

- Die **projektive Ebene** \mathbb{RP}^2 :

$$H^k(\mathbb{RP}^2; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & ; k = 0 \\ 0 & ; k \geq 1 \end{cases}$$

Vgl. Beispiel 9.31 aus „9. DIFFERENTIAL FORMS ON SMOOTH MANIFOLDS“^[1]

- Das **Möbiusband** M:

M ist homotopieäquivalent zum Kreis S^1 und damit gilt

$$H^k(M; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & ; k = 0 \\ \mathbb{R} & ; k = 1 \\ 0 & ; k \geq 2 \end{cases}$$

- Die **Kleinsche Flasche** K:

$$H^k(K; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & ; k = 0 \\ \mathbb{R} & ; k = 1 \\ 0 & ; k \geq 2 \end{cases}$$

Für alle diese 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten gilt $H^0(M; \mathbb{R}) \neq H^2(M; \mathbb{R})$.

Beobachte, dass in allen Gegenbeispielen die betrachteten Mannigfaltigkeiten nicht orientierbar sind.

Kapitel 2

Orientierbarkeit und Orientierung einer Mannigfaltigkeit

2.1 Orientierung von Vektorräumen

Definition 2.1.1

Auf einem endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V sagen wir, dass zwei geordnete Basen A und B dieselbe Orientierung definieren (und schreiben $A \sim B$), wenn $\det(T_B^A) > 0$ gilt.

In diesem Fall heißt die Basiswechselmatrix T_B^A orientierungserhaltend.

Bemerkung:

- (a) Da T_B^A Basen auf Basen abbildet, hat die Matrix vollen Rang und es ist $\det(T_B^A) \neq 0$
- (b) Der Begriff, dieselbe Orientierung zu besitzen, definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen eines n -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraums
Daraus ergeben sich genau zwei Äquivalenzklassen (Vorzeichen \pm) von Orientierungen auf einem solchen Vektorraum
- (c) Eine Orientierung \mathcal{O} von V ist also eine Äquivalenzklasse, bestehend aus Basen von V , die paarweise zueinander orientierungserhaltende Basiswechselmatrizen besitzen

2.2 Orientierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 2.2.1

Sei M^n eine glatte (bzw. C^k -) Mannigfaltigkeit, dann heißt eine Differentialform $\omega \in \Omega^n(M^n)$ vom Grade n , Orientierungsform auf M , falls für alle $q \in M$ und jede Basis $(\xi_1; \dots; \xi_n)$ von $T_q M$ gilt: $\omega_q(\xi_1; \dots; \xi_n) \neq 0$

M heißt orientierbar, falls solch eine Orientierungsform auf M existiert.

Zwei Orientierungsformen ω und τ auf M heißen äquivalent, falls $\tau = f \cdot \omega$ gilt für ein $f \in \Omega^0(M)$ mit $f(q) > 0$ für alle $q \in M$.

Eine Orientierung auf M ist eine Äquivalenzklasse von Orientierungsformen auf M unter dieser Relation.

Definition 2.2.2

Sei M^n eine glatte (bzw. C^k -) Mannigfaltigkeit mit Orientierungsform ω , dann heißt eine geordnete Basis $(b_1; \dots; b_n)$ von $T_q M$ positiv (negativ) orientiert bezüglich ω , falls

$$\omega_q(b_1; \dots; b_n) > 0 \quad (\omega_q(b_1; \dots; b_n) < 0)$$

Bemerkung:

- (a) Da ω eine Orientierungsform ist, besitzt $\omega_q(b_1; \dots; b_n)$ entweder positives oder negatives Vorzeichen
- (b) Das Signum hängt bloß von der von ω definierten Orientierung ab (nicht von ω selbst):
Sei $\tau = f \cdot \omega$ mit $f \in \Omega^0(M)$ und $f(q) > 0 \quad \forall q \in M$, dann ist
 $\tau_q(b_1; \dots; b_n) = f(q) \cdot \omega_p(b_1; \dots; b_n) > 0$

Satz 2.2.3

Eine glatte (bzw. C^k -) Mannigfaltigkeit M^n ist genau dann orientierbar, wenn all ihre Zusammenhangskomponenten orientierbar sind.

Beweis:

Die eine Richtung ist klar.

Seien also umgekehrt alle Zusammenhangskomponenten orientierbar. Es bezeichne X die Menge der Zusammenhangskomponenten. Seien also für alle $U \in X$ Orientierungsformen $\omega_U \in \Omega^n(U)$ gegeben. Wähle eine glatte Zerlegung der Eins $\{\rho_U\}_{U \in X}$ bezüglich X . Dann bildet

$$\omega = \sum_{U \in X} \rho_U \omega_U$$

eine glatte n -Form auf M , die weiterhin nicht-degeneriert ist. \square

Orientierungsüberlagerung für Mannigfaltigkeiten:

Für eine Mannigfaltigkeit M^n mit $q \in M$ bezeichne $\text{Or}(T_q M)$ die zweielementige Menge bestehend aus den Orientierungen auf dem Tangentialraum $T_q M$. Betrachte nun den Raum

$$E := \bigsqcup_{q \in M} \text{Or}(T_q M)$$

Im Folgenden gilt es E so zu topologisieren, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi : E &\rightarrow M \\ \text{Or}(T_q M) &\ni \alpha \mapsto q \end{aligned}$$

eine 2-blättrige Überlagerung wird.

Da die Menge $\text{Or}(T_q M)$ zweielementig ist, motiviert die Forderung den Ansatz, die Topologie auf E so zu konstruieren, dass $\pi^{-1}(U) \cong U \times \{\pm 1\}$.

Betrachte zunächst eine Karte $(U; \varphi)$ mit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Für jedes $q \in U$ überträgt dann $D_q \varphi : T_q M \rightarrow \mathbb{R}^n$ jede Orientierung $\alpha \in \text{Or}(T_q M)$ auf eine der Orientierungen von \mathbb{R}^n . Definiere also

$$\sigma_{(U; \varphi)} : \bigsqcup_{q \in U} \text{Or}(T_q M) \rightarrow \{\pm 1\}, \quad (q; \alpha) \mapsto \begin{cases} +1 & ; D_q \varphi \text{ schickt } \alpha \text{ auf die Standardorientierung des } \mathbb{R}^n \\ -1 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Nun lässt sich die Bijektion

$$\tau_{(U; \varphi)} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \{\pm 1\}, \quad (q; \alpha) \mapsto (q; \sigma_{(U; \varphi)}(q; \alpha))$$

konstruieren, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow[\tau]{\cong} & U \times \{\pm 1\} \\ \pi \searrow & & \swarrow pr_U \\ & U & \end{array}$$

Hierbei wird also $\pi^{-1}(U) \subseteq E$ so topologisiert, dass der Unterraum die Produkttopologie von $U \times \{\pm 1\}$ trägt.

Die Mengen $U^\pm = \tau^{-1}(U \times \{\pm 1\})$ (für $U \subseteq M$ offen) bilden folglich eine Basis der geforderten Topologie auf E .

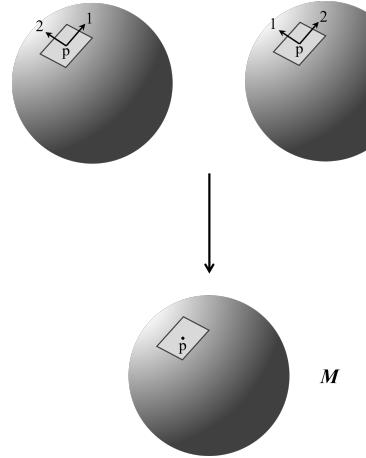


Abbildung 2.1: Orientierungsüberlagerung am Beispiel einer Sphäre

Satz 2.2.4 (Äquivalente Definitionen: Orientierbarkeit)

Für eine zusammenhängende glatte (bzw. C^k -) Mannigfaltigkeit M^n gilt äquivalent

- (i) M ist orientierbar
- (ii) Es gibt eine Familie $\{O_p\}_{p \in M}$ von Orientierungen O_p der Tangentialräume $T_p M$ (im Sinne der Orientierungen für Vektorräume), so dass zu jedem Punkt $p \in M$ eine auf einer offenen Umgebung U von p definierte Karte $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Koordinatenfunktionen $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, für die an jedem Punkt $q \in U$ die durch die Karte induzierte Basis

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_q; \dots; \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_q \right)$$
 des Tangentialraums $T_q M$ bezüglich O_q positiv orientiert ist
- (iii) Es existiert ein Atlas \mathcal{A} von M , so dass für alle Karten $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ mit nichtleerem Schnitt $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$ und alle $x \in \psi(U_\varphi \cap U_\psi)$ gilt:

$$\det(D_x(\varphi \circ \psi^{-1})) > 0$$
- (iv) Für die Orientierungsüberlagerung $\pi : E \rightarrow M$ ist der Totalraum E nicht zusammenhängend
- (v) Alle Orientierungen der Tangentialräume $T_p M$ bleiben unter Transport von Schleifen erhalten, d. h. für alle Schleifen $\gamma \in \pi_1(M; q)$ und $\alpha_q \in \text{Or}(T_q M)$ gilt

$$L(\gamma; (q; \alpha_q))(0) = L(\gamma; (q; \alpha_q))(1)$$
- (vi) Die Orientierungsüberlagerung $\pi : E \rightarrow M$ ist trivial

Beweis:

Es bezeichne im Folgenden für eine Karte $(U; \varphi)$ mit $q \in U$ die auf $T_q M$ induzierte Basis

$$B_q^\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_q; \dots; \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_q \right).$$

(i) \Rightarrow (ii) :

Sei $\omega \in \Omega^n(M^n)$ eine Orientierungsform von M . Für $p \in M$, wähle eine Karte $(U; \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ mit $p \in U$. Da $q \mapsto \omega_q \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_q; \dots; \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_q \right)$ stetig ist und $\omega_q \neq 0$ für alle $q \in U$ erhalten wir

$$\text{sgn} \left(\omega_q \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_q; \dots; \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_q \right) \right) = \sigma \in \{\pm 1\} \quad \forall q \in U$$

Setze nun $O = \{O_p\}_{p \in M}$, so dass für ein $q \in M$ und einer in einer Umgebung von q definierten Karte ψ , die Basis B_q^ψ bezüglich O_q positiv orientiert ist, genau dann, wenn sie unter Auswertung von ω_q ebenso das Vorzeichen σ besitzt.

Es gilt nun lediglich zu zeigen, dass dies eine wohldefinierte Orientierung der Vektorräume $T_q M$ bildet, d. h.

$$\operatorname{sgn}(\omega_q(B_q^\varphi)) = \sigma \wedge \det(T_{B_q^\varphi}) > 0 \implies \operatorname{sgn}(\omega_q(B_q^\psi)) = \sigma$$

Dazu berechne

$$\begin{aligned} \omega_q\left(\frac{\partial}{\partial y^1}|_q; \dots; \frac{\partial}{\partial y^n}|_q\right) &= \omega_q\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y^1}(\psi(q))\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_q\right); \dots; \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y^n}(\psi(q))\left(\frac{\partial}{\partial x^j}|_q\right)\right) \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y^{\tau(i)}}(\psi(q)) \omega_q\left(\frac{\partial}{\partial x^1}|_q; \dots; \frac{\partial}{\partial x^n}|_q\right) \\ &= \det(T_B^A) \omega_q\left(\frac{\partial}{\partial x^1}|_q; \dots; \frac{\partial}{\partial x^n}|_q\right) \end{aligned}$$

wobei $f = (f_1; \dots; f_n) = \varphi \circ \psi^{-1}$ und $T_{B_q^\psi}^{B_q^\varphi} = D_{\psi(q)}(\varphi \circ \psi^{-1})$ ist.

(ii) \Rightarrow (iii) :

Sei $O = \{O_p\}_{p \in M}$ eine Familie von Orientierungen der Tangentialräume wie in (ii). Definiere nun folgenden Atlas

$$\mathcal{A} := \{(U; \varphi) \text{ Karte von } M \mid B_q^\varphi \text{ ist bezüglich } O_q \text{ positiv orientiert } \forall q \in U\}.$$

Für alle Karten φ, ψ in \mathcal{A} mit nichtleerem Schnitt $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$, $x = \psi(q)$ mit $q \in U_\varphi \cap U_\psi$ gilt dann:

$$\det(D_x(\varphi \circ \psi^{-1})) = \det(D_{\psi(q)}(\varphi \circ \psi^{-1})) = \det(T_{B_q^\psi}^{B_q^\varphi}) > 0$$

(iii) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (iv) :

Sei \mathcal{A} ein Atlas von M wie in (iii), so ist die Abbildung $\sigma : E \rightarrow \{\pm 1\}$, gegeben durch

$$\bigsqcup_{q \in M} \operatorname{Or}(T_q M) \ni (q; \alpha) \mapsto \begin{cases} +1 & ; D_q \varphi \text{ schickt } \alpha \text{ auf die Standardorientierung von } \mathbb{R}^n \\ & \text{wobei } U \text{ Umgebung von } q \text{ ist und } (U; \varphi) \in \mathcal{A} \\ -1 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

unabhängig von der Wahl der Karte φ auf ganz E wohldefiniert. Dies garantiert (iii), da für $(V; \psi) \in \mathcal{A}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$, $x = \psi(q)$ und $q \in U \cap V$ gilt

$$\begin{aligned} D_q \psi &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(q) dx^i = D_x(\psi \circ \varphi^{-1}) D_q \varphi \\ \implies D_q \psi(b_i) &= D_x(\psi \circ \varphi^{-1}) D_q \varphi(b_i) \quad \text{mit } \det(D_x(\psi \circ \varphi^{-1})) > 0 \end{aligned}$$

Damit ist ebenso die Abbildung

$$\tau : E \rightarrow M \times \{\pm 1\}, (q; \alpha) \mapsto (q; \sigma_{(U; \varphi)}(\alpha))$$

wohldefiniert, als auch bijektiv und es gilt folglich

$$E \cong M \times \{\pm 1\}$$

Damit ist die Orientierungsüberlagerung π trivial, als auch der Totalraum E nicht zusammenhängend.

(iv) \Rightarrow (vi) :

Da M lokal wegzusammenhängend ist, bildet auch $\pi|_C: C \rightarrow M$ für jede Wegekomponente $C \subseteq E$ eine Überlagerung mit konstanter Blätterzahl (da die Blätterzahl lokal konstant ist und damit auf Zusammenhangskomponenten schon konstant).

Angenommen der Totalraum E sei nicht zusammenhängend und zerfalle in die Komponenten $E \cong E_1 \sqcup E_2$, so besitzen die Überlagerungen $\pi|_{E_i}$ bereits Blätterzahl 1 (sonst wäre sie auf ganz E_i 2 und es folge aus $\pi|_{E_i}^{-1}(q) = \{(q; \alpha_q); (q; \bar{\alpha}_q)\} \quad \forall q \in M$ schon $E_i = E$). Folglich sind die $\pi|_{E_i}$ bereits Homöomorphismen $E_i \cong M$ und es gilt $E \cong M \sqcup M \cong M \times \{\pm 1\}$ und wir erhalten die triviale Überlagerung

$$\begin{array}{ccc} E \cong E_1 \sqcup E_2 & \xrightarrow[\substack{(\pi|_{E_1} \times -1; \pi|_{E_2} \times +1)}]{\cong} & M \times \{\pm 1\} \\ & \searrow \pi \quad \swarrow pr_M & \\ & M & \end{array}$$

(v) \Rightarrow (iv) :

Nehme per Kontraposition an, dass E zusammenhängend wäre, also sogar wegzusammenhängend. Wähle dann einen Weg $\tilde{\gamma}$ in E von $(q; \alpha_q)$ nach $(q; \bar{\alpha}_q)$, dann gilt nach der Eindeutigkeit der Wegeliftung

$$\begin{aligned} L(\pi \circ \tilde{\gamma}; (q; \alpha_q))(0) &= (q; \alpha_q) \\ L(\pi \circ \tilde{\gamma}; (q; \alpha_q))(1) &= (q; \bar{\alpha}_q) \end{aligned}$$

also folglich

$$L(\gamma; (q; \alpha_q))(0) \neq L(\gamma; (q; \alpha_q))(1).$$

(vi) \Rightarrow (v) :

Ist die Orientierungsüberlagerung trivial, so gilt $E = \bigsqcup_{q \in M} \text{Or}(T_q M) \cong M \times \{\pm 1\}$ mittels der trivialen Überlagerung $(q; \alpha) \mapsto q$. Wähle also für jedes $q \in M$ die eindeutige Orientierung $\alpha_q \in \text{Or}(T_q M)$ die zu $(q; +1)$ korrespondiert.

Damit zerfällt der Totalraum E in die zwei Komponenten $O := \{(q; \alpha_q)\}_{q \in M}$ und $E \setminus O$.

Somit gilt für $\gamma \in \pi_1(M; q)$ und $\alpha_q \in \text{Or}(T_q M)$

$$(q; \alpha_q) = L(\gamma; (q; \alpha_q))(0) = L(\gamma; (q; \alpha_q))(1)$$

da aus $\pi \circ L(\gamma; (q; \alpha_q))(1) = \gamma(1) = q$ folgt, dass

$$L(\gamma; (q; \alpha_q))(1) \in \pi^{-1}(q) = \{(q; \alpha_q); (q; \bar{\alpha}_q)\}$$

wobei $\bar{\alpha}_q$ die umgekehrte Orientierung bezeichne (die, die in $E \setminus O$ enthalten ist).

(vi) \Rightarrow (i) :

Ist die Orientierungsüberlagerung trivial, so ist die Abbildung $\sigma: E \rightarrow \{\pm 1\}$, gegeben durch

$$\bigsqcup_{q \in M} \text{Or}(T_q M) \ni (q; \alpha) \mapsto \begin{cases} +1 & ; D_q \varphi \text{ schickt } \alpha \text{ auf die Standardorientierung von } \mathbb{R}^n \\ & \text{wobei } U \text{ Umgebung von } q \text{ ist und } (U; \varphi) \text{ Karte von } M \\ -1 & ; \text{ sonst} \end{cases}$$

unabhängig von der Wahl der Karte φ auf ganz E wohldefiniert.

Damit gilt für die Basiswechselmatrizen $T_{B_q^\psi}^{B_q^\varphi}$ von Karten φ, ψ mit nichtleerem Schnitt $U_\varphi \cap U_\psi \ni q$

$$\det(T_{B_q^\psi}^{B_q^\varphi}) = \det(D_{\psi(q)}(\varphi \circ \psi^{-1})) > 0$$

Sei nun $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Zerlegung der Eins bezüglich der zugrundeliegenden Mengen des Atlasses. Für jede Karte $(U_\alpha; \varphi_\alpha = (x_\alpha^1; \dots; x_\alpha^n))$ definiert $\omega_\alpha = dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n$ eine nicht-degenerierte n -Form auf U_α . Weiterhin gilt auf den Überschneidungen $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ mittels Kettenregel $\frac{\partial}{\partial x_\beta^j} = \sum_j \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^j} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}$

$$\begin{aligned} dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^1}; \dots; \frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \right) &= \det \begin{bmatrix} dx_\alpha^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \right) & \dots & dx_\alpha^n \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_\alpha^n \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \right) & \dots & dx_\alpha^n \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \right) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} dx_\alpha^1 \left(\sum_j \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^1} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \right) & \dots & dx_\alpha^1 \left(\sum_j \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx_\alpha^n \left(\sum_j \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^1} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \right) & \dots & dx_\alpha^n \left(\sum_j \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \right) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^1} & \dots & \frac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^1} & \dots & \frac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n} \end{bmatrix} \\ &= \det(D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})) > 0 \end{aligned}$$

Folglich ist die n -Form $\sum_\alpha \rho_\alpha \omega_\alpha$ auf ganz M wohldefiniert und weiter sogar überall von Null verschieden, da $\omega_\alpha = \det(D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})) \omega_\beta$.

□

Satz 2.2.5

Sei M eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(M) = \{1\}$, dann ist M orientierbar.

Beweis:

Da für jede zusammenhängende Überlagerung $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M$ die Blätterzahl mit dem Index $[\pi_1(M) : \pi_1(\tilde{E})] = 1$ übereinstimmen muss, kann die 2-blättrige Orientierungsüberlagerung keinen zusammenhängenden Totalraum E besitzen.

□

2.2.1 Beispiele

- Der **euklidische Raum \mathbb{R}^n** :

Für den euklidischen Raum \mathbb{R}^n ist $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ (wobei $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die i -te Projektion bezeichnet) eine Orientierungsform – welche die Standardorientierung auf dem \mathbb{R}^n definiert.

- Die **n -Sphäre S^n** :

Definiere eine n -Form $\omega_0 \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$ via

$$\omega_{0,x}(w_1; \dots; w_n) = \det(x; w_1; \dots; w_{n+1}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Es gilt $\omega_{0,x}(e_1; \dots; \hat{e}_i; \dots; e_n) = (-1)^{i+1} x_i$ und damit

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}$$

Für ein $x \in S^n$ und eine Basis $w_1, \dots, w_n \in T_x S^n$ definiert x, w_1, \dots, w_n eine Basis des \mathbb{R}^{n+1} (Orthogonalität: $0 = \frac{d}{dt} |\gamma|^2 = 2 \langle \gamma', \frac{dy}{dt} \rangle$ für $\gamma : I \rightarrow S^n$ mit $\gamma(0) = x$).

Per Definition von ω_0 (über die Determinante) folgt, dass ω_0 eine Orientierungsform auf S^n definiert.

- Der **reelle projektive Raum** \mathbb{RP}^n :

Für n ungerade, definiere wie Folgt eine Orientierungsform τ auf \mathbb{RP}^n :

Die n -Form τ sei gegeben durch

$$\tau_{\pi(p)}(D_p\pi(\xi_1); \dots; D_p\pi(\xi_n)) := \omega_{0,p}(\xi_1; \dots; \xi_n) \quad \forall \xi_i \in T_p S^n, p \in S^n$$

($\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ bezeichnet die Projektion)

Wohldefiniertheit:

Für $p \mapsto -p, \xi_1 \mapsto -\xi_1, \dots, \xi_n \mapsto -\xi_n$ haben wir nach obiger Identifikation

$$\tau_{\pi(-p)}(D_{-p}\pi(-\xi_1); \dots; D_{-p}\pi(-\xi_n)) = \omega_{0,-p}(-\xi_1; \dots; -\xi_n)$$

Weiter gilt $D_{-p}\pi(-\xi_i) = D_p\pi(\xi_i)$: Für $\tilde{\gamma} := -\gamma : I \rightarrow S^n$ mit $\gamma(0) = p$

$$D_{-p}\pi([\tilde{\gamma}'(0)]) = [(\pi \circ \tilde{\gamma})'(0)] = [(\pi \circ \gamma)'(0)] = D_p\pi([\gamma'(0)])$$

Folglich muss gelten:

$$\omega_{0,p}(\xi_1; \dots; \xi_n) \stackrel{!}{=} \omega_{0,-p}(-\xi_1; \dots; -\xi_n) \quad \forall \xi_i \in T_p S^n, p \in S^n$$

(Bemerke, dass dies tatsächlich die einzige Bedingung ist, die die Wohldefiniertheit von τ sicherstellt)

Per Definition von ω_0 (gegeben durch det) ist die Bedingung für ungerade n erfüllt.

Da nun ω_0 nicht-degeneriert ist, ist auch τ nicht-degeneriert.

Umgekehrt kann man zeigen, dass \mathbb{RP}^n auch nur dann orientierbar ist, wenn n ungerade ist.

- Das **Möbiusband** M:

Das M nicht orientierbar ist, folgt leicht visuell aus [Satz 2.2.4](#) (v).

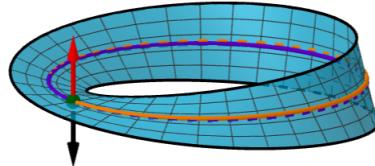


Abbildung 2.2: Möbius Band mit (parametrisiertem) Äquator

- Die **Kleinsche Flasche** K:

Analog zu M folgt auch, dass K nicht orientierbar ist.

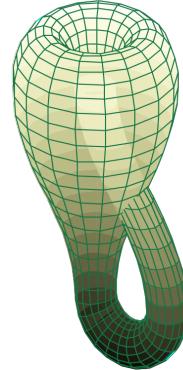


Abbildung 2.3: Kleinsche Flasche^[2]

Kapitel 3

Poincaré-Dualität

3.1 deRham-Kohomologie mit kompakten Trägern

Für eine glatte Mannigfaltigkeit M bezeichnet $\Omega_c^*(M)$ den Subkomplex des deRham-Komplexes, der vom Grad p dem Vektorraum $\Omega_c^p(M)$ aller p -Formen mit kompakten Träger entspricht. Die (deRham-) Kohomologie-Gruppe mit kompakten Träger wird dann wie Folgt definiert:

$$H_c^p(M) = \frac{\text{Ker}(d : \Omega_c^p(M) \rightarrow \Omega_c^{p+1}(M))}{\text{Im}(d : \Omega_c^{p-1}(M) \rightarrow \Omega_c^p(M))}$$

Wenn M kompakt ist gilt also $\Omega_c^*(M) = \Omega^*(M)$ und damit auch $H_c^*(M) = H^*(M)$.

Bemerkung:

- (a) H_c^* ist i. A. kein kontravarianter Funktor mehr auf der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten zusammen mit allen glatten Abbildungen
(Für $\omega \in \Omega_c^p(N)$, $\varphi : M \rightarrow N$ glatt, hat $\Omega^*(\varphi)(\omega)$ nicht notwendigerweise kompakten Träger)
- (b) Wenn φ aber eine glatte und eigentliche Abbildung ist (d. h. $\varphi^{-1}(K)$ kompakt für alle K kompakt), dann gilt

$$\text{supp}_M(\Omega^*(\varphi)(\omega)) \subseteq \varphi^{-1}(\text{supp}_N \omega)$$

und damit hat $\Omega^p(\varphi)(\omega)$ einen kompakten Träger wenn immer ω einen kompakten Träger besitzt

- (c) Damit wird die Abbildung φ^* zu einer Kettenabbildung $\Omega_c^*(N) \rightarrow \Omega_c^*(M)$ und induziert eine Abbildung

$$H_c^p(\varphi) : H_c^p(N) \rightarrow H_c^p(M)$$

und es wird H_c^* zu einem kontravarianten Funktor auf der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten zusammen mit den glatten **eigentlichen** Abbildungen

- (d) Ist $\varphi : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus, also insbesondere eigentlich, so gilt schon $H_c^p(M) \cong H_c^p(N)$

Aus dem Kapitel „10. INTEGRATION ON MANIFOLDS“^[1] ist bekannt, dass für orientierbare glatte Mannigfaltigkeiten M^n die Sequenz

$$\Omega_c^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^n(M) \xrightarrow{\int_M} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

exakt ist.

Daraus folgt sofort

$$\int_M : H_c^n(M^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}.$$

Seien $V \subseteq U$ offene Teilmengen einer glatten Mannigfaltigkeit M und sei $i : V \hookrightarrow U$ die Inklusion. Dadurch wird eine Kettenabbildung

$$i_* : \Omega_c^*(V) \rightarrow \Omega_c^*(U)$$

induziert, definiert via

$$i_*(\omega)|_V = \omega, \quad i_*(\omega)|_{U \setminus \text{supp}(\omega)} = 0$$

für $\omega \in \Omega_c^*(V)$. Damit einher kommt die lineare Abbildung

$$i_* : H_c^p(V) \rightarrow H_c^p(U)$$

Für eine weitere offene Teilmenge $W \subseteq V$ mit Inklusion $j : W \hookrightarrow V$ gilt $(i \circ j)_*(\omega) = (i_* \circ j_*)(\omega)$.

Dies definiert einen kovarianten Funktor auf der Kategorie der offenen Teilmengen und Inklusionen einer gegebenen glatten Mannigfaltigkeit M .

Seien $U_1, U_2 \subseteq M$ offen mit $U_1 \cup U_2 = U$ und Inklusionen $i_\nu : U_\nu \hookrightarrow U$ und $j_\nu : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_\nu$, dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega_c^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{J_p} \Omega_c^p(U_1) \oplus \Omega_c^p(U_2) \xrightarrow{I_p} \Omega_c^p(U) \longrightarrow 0$$

exakt, wobei

$$J_p(\omega) = (j_{1*}(\omega); -j_{2*}(\omega)) \quad \text{und} \quad I_p(\omega_1; \omega_2) = i_{1*}(\omega_1) + i_{2*}(\omega_2).$$

Zunächst ist klar, dass J_p injektiv. Für die Surjektivität von I_p , wähle bezüglich der Überdeckung $\{U_1; U_2\}$ eine Zerlegung der Eins $\{\rho_\nu\}_{\nu=1,2}$ und setze für ein gegebenes $\omega \in \Omega_c^p(U)$ $\omega_\nu := (\rho_\nu \cdot \omega)|_{U_\nu}$, so gilt $I_p(\omega_1; \omega_2) = \rho_1 \omega + \rho_2 \omega = \omega$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} (I_p \circ J_p)(\omega) &= i_{1*}(j_{1*}(\omega)) + i_{2*}(-j_{2*}(\omega)) \\ &= (i_1 \circ j_1)_*(\omega) - (i_2 \circ j_2)_*(\omega) \\ &= 0 \end{aligned}$$

also $\text{im}(J_p) \subseteq \ker(I_p)$. Ist hingegen $(\omega_1; \omega_2) \in \ker(I_p)$, so gilt $i_{1*}(\omega_1) = -i_{2*}(\omega_2)$. Daraus folgt $\text{supp}_{U_\nu}(\omega_\nu) \subseteq U_1 \cap U_2$ und $\omega_1|_{U_1 \cap U_2} = -\omega_2|_{U_1 \cap U_2}$. Für $\omega := \omega_1|_{U_1 \cap U_2}$ gilt dann $J_p(\omega) = (\omega_1; \omega_2)$.

Theorem 3.1.1 (Mayer-Vietoris)

Obige Abbildungen induzieren eine exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow H_c^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{J_*} H_c^p(U_1) \oplus H_c^p(U_2) \xrightarrow{I_*} H_c^p(U) \xrightarrow{\partial_*} H_c^{p+1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \dots$$

Zur Erinnerung ist $\partial_*([\omega])$ für $\omega \in \Omega_c^p(U)$ wie Folgt definiert:

Zerlege $\omega = \omega_1 + \omega_2$ mit $\omega_\nu \in \Omega_c^p(U_\nu)$ und $\text{supp}_U(\omega_\nu) \subseteq U_\nu$, dann ist $\tau := d\omega_1|_{U_1 \cap U_2} = -d\omega_2|_{U_1 \cap U_2}$ (da ω geschlossen ist) und $\tau \in \Omega_c^{p+1}(U_1 \cap U_2)$ geschlossen und repräsentiert $\partial_*([\omega]) \in H_c^{p+1}(U_1 \cap U_2)$.

Der kontravariante Funktor der einen Vektorraum A auf den dualen Vektorraum $A^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A; \mathbb{K})$ schickt, ist exakt, d. h. für eine exakte Sequenz von Vektorräumen

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

ist auch

$$C^* \xrightarrow{\psi^*} B^* \xrightarrow{\varphi^*} A^*$$

exakt: Es ist klar, dass $\varphi^* \circ \psi^* = 0$ gilt.

Sei umgekehrt $f \in \ker(\varphi^*)$, also $f \circ \varphi = 0$. Definiere nun $g : \text{im}(\psi) \rightarrow K$ via $g(c) := f(b)$ für $\psi(b) = c$. Die Wohldefiniertheit folgt aus folgender Berechnung

$$\begin{aligned}\psi(b) = \psi(b') &\implies b - b' \in \ker(\psi) = \text{im}(\varphi) \\ &\implies f(b - b') = 0 \\ &\iff f(b) = f(b').\end{aligned}$$

Nun lässt sich die lineare Abbildung g zu einer auf ganz C fortsetzen (*– ist C ∞ -dimensional so geschieht dies unter Verwendung von Zorns-Lemma*).

Dementsprechend induziert die lange exakte Sequenz aus Theorem 3.1.1 die dualisierte exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow H_c^{p+1}(U_1 \cap U_2)^* \xrightarrow{\partial^!} H_c^p(U)^* \xrightarrow{I^!} H_c^p(U_1)^* \oplus H_c^p(U_2)^* \xrightarrow{J^!} H_c^p(U_1 \cap U_2)^* \longrightarrow \dots$$

mit

$$I^!(\alpha) = ((i_{1*})^*(\alpha); (i_{2*})^*(\alpha)) \quad \text{und} \quad J^!(\alpha_1; \alpha_2) = (j_{1*})^*(\alpha_1) - (j_{2*})^*(\alpha_2)$$

(Hierbei bezeichnet für eine lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$, F^* die duale Abbildung $W^* \rightarrow V^*$ zu F gegeben durch $F^*(f) = f \circ F$.)

3.2 Konstruktion der Abbildung / Aussage

Für eine glatte Mannigfaltigkeit M^n definiert das äußere Produkt eine bilineare Abbildung

$$\Omega^p(M) \times \Omega_c^{n-p}(M) \rightarrow \Omega_c^n(M)$$

da $\text{supp}(\omega_1 \wedge \omega_2) \subseteq \text{supp}(\omega_1) \cap \text{supp}(\omega_2)$ und induziert damit eine bilineare Abbildung

$$H^p(M) \times H_c^{n-p}(M) \rightarrow H_c^n(M)$$

Ist M nun weiter auch orientierbar, so ist Integration auf M wohldefiniert und wir erhalten eine Bilinearform

$$B_M^p : H^p(M) \times H_c^{n-p}(M) \rightarrow \mathbb{R}, ([\omega_1]; [\omega_2]) \mapsto \int_M \omega_1 \wedge \omega_2$$

welche dann kanonisch die Abbildung

$$D_M^p : H^p(M) \rightarrow H_c^{n-p}(M)^*, [\omega] \mapsto ([\tau] \mapsto B_M^p(\omega; \tau))$$

induziert.

Theorem 3.2.1 (Poincaré-Dualität)

Für eine orientierbare glatte n -Mannigfaltigkeit M definiert die Abbildung

$$D_M^p : H^p(M) \rightarrow H_c^{n-p}(M)^*$$

für alle p einen Isomorphismus.

3.3 Beweis

Die Methodik des Beweises der **Poincaré-Dualität** basiert auf dem Leitmotiv von folgendem

Satz 3.3.1 (Induktion über offene Mengen)

Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit mit offener Überdeckung $\mathcal{V} = (V_\beta)_{\beta \in B}$. Sei weiter \mathcal{U} eine Familie offener Teilmengen von M die den folgenden Bedingungen genügen:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{U}$
- (ii) Jede offene Teilmenge $U \subseteq V_\beta$ diffeomorph zu \mathbb{R}^n ist in \mathcal{U} enthalten
- (iii) Wenn U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ in \mathcal{U} enthalten sind, dann gilt auch $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$
- (iv) Ist U_1, U_2, \dots eine Folge paarweiser disjunkter offener Teilmengen mit $U_i \in \mathcal{U}$, dann gilt auch $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \in \mathcal{U}$

Dann gehört M zu \mathcal{U} .

Im Folgenden sei M stets eine orientierbare glatte n -Mannigfaltigkeit.

Lemma 3.3.2

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & ; p = n \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:

– Für $p = 0$:

Beobachte, dass der Vektorraum $H_c^0(\mathbb{R}^n)$ aus den lokal konstanten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompakten Träger besteht. Da der \mathbb{R}^n zusammenhängend ist, muss so eine Funktion f schon global konstant sein und da nun \mathbb{R}^n nicht kompakt ist, muss schon $f \equiv 0$ gelten.

– Für $0 < p < n$:

Betrachte statt dem \mathbb{R}^n den, via der stereographischen Projektion, diffeomorphen Raum $S^n \setminus \{x_0\}$. Der Kettenkomplex $\Omega_c^*(S^n \setminus \{x_0\})$ aufgefasst als Subkomplex von $\Omega^*(S^n)$ besteht aus allen Differentialformen, die in einer Umgebung von x_0 verschwinden.

Sei $\omega \in \Omega_c^p(S^n \setminus \{x_0\})$ eine geschlossene Form. Bekanntlich gilt $H_c^p(S^n) = H^p(S^n) = 0$, womit ω in $\Omega_c^*(S^n)$ exakt ist. Folglich gibt es ein $\tau \in \Omega_c^{p-1}(S^n)$ mit $d\tau = \omega$. Es genügt nun zu zeigen, dass τ so modifiziert werden kann, dass die Abbildung in einer Umgebung von x_0 verschwindet.

Sei also W eine offene Umgebung von x_0 , diffeomorph zu \mathbb{R}^n , so dass $\omega|_W = 0$.

Im Falle $p = 1$ ist τ eine Funktion auf S^n , die konstant auf W ist, sei also $\tau|_W = a$. Dann gilt für $\tau' := \tau - a \in \Omega_c^0(S^n \setminus \{x_0\})$ sowohl $\tau'|_W \equiv 0$ als auch $d\tau' = \omega$.

Ist hingegen $2 \leq p \leq n$, so bemerke, dass $H^{p-1}(W) \cong H^{p-1}(\mathbb{R}^n) = 0$ und damit $\tau|_W$ eine geschlossene Form ist – sei also $\sigma \in \Omega^{p-2}(W)$ mit $d\sigma = \tau|_W$. Wähle nun eine glatte Funktion $\varphi : S^n \rightarrow [0; 1]$ mit $\text{supp}_{S^n}(\varphi) \subseteq W$, welche den Wert 1 auf einer kleineren offenen Umgebung $U \subsetneq W$ von x_0 . Die Form $\varphi \cdot \sigma$ auf W kann auf ganz S^n zu einer Form $\tilde{\sigma} \in \Omega^{p-2}(S^n)$ fortgesetzt werden, indem sie auf $S^n \setminus W$ Null gesetzt wird. Für die Form $\tau' := \tau - d\tilde{\sigma}$ gilt dann sowohl $\tau'|_U \equiv 0$ als auch $d\tau' = d\tau = \omega$.

In beiden Fällen ist ω also auch in $\Omega_c^*(S^n \setminus \{x_0\})$ exakt.

– Für $p = n$:

Die Bemerkung vom Anfang des Kapitels liefert für die orientierbare glatte Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^n$ sofort

$$\int_{\mathbb{R}^n} : H_c^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}.$$

Lemma 3.3.3

Seien $V \subseteq U \subseteq M$ offene Teilmengen, so kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(U) & \xrightarrow{H^p(i)} & H^p(V) \\ D_U^p \downarrow & & \downarrow D_V^p \\ H_c^{n-p}(U)^* & \xrightarrow{(i_*)^*} & H_c^{n-p}(V)^* \end{array}$$

Beweis:

Seien $\omega \in \Omega^p(U)$, $\tau \in \Omega_c^{n-p}(V)$ geschlossene Formen mit Kohomologie-Klassen $[\omega]$, $[\tau]$, so gilt

$$\begin{aligned} (D_V^p \circ H^p(i))([\omega])([\tau]) &= D_V^p([i^*(\omega)])([\tau]) = \int_V i^*(\omega) \wedge \tau \\ ((i_*)^* \circ D_U^p)([\omega])([\tau]) &= D_U^p([\omega])[i_*(\tau)] = \int_U \omega \wedge i_*(\tau) \end{aligned}$$

Da weiter $\text{supp}_U(\omega \wedge i_*(\tau)) \subseteq \text{supp}_U(i_*(\tau)) = \text{supp}_V(\tau)$ gilt, genügt es im zweiten Integral über V zu integrieren. Nun genügt es zu bemerken, dass die n -Formen $i^*(\omega) \wedge \tau$ und $\omega \wedge i_*(\tau)$ auf V übereinstimmen.

Lemma 3.3.4

Seien $U_1, U_2 \subseteq M$ offen mit Vereinigung U , dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^p(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\partial^*} & H^{p+1}(U) \\ D_{U_1 \cap U_2}^p \downarrow & & \downarrow D_U^{p+1} \\ H_c^{n-p}(U_1 \cap U_2)^* & \xrightarrow{(-1)^{p+1}(\partial_*)^*} & H_c^{n-p-1}(U)^* \end{array}$$

kommutativ.

Beweis:

Seien $\omega \in \Omega^p(U_1 \cap U_2)$, $\tau \in \Omega_c^{n-p-1}(U)$ geschlossene Formen. Schreibe nun $\omega = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$ mit $\omega_\nu \in \Omega^p(U_\nu)$ und $j_\nu : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_\nu$, die natürlichen Inklusionen. Sei $\kappa \in \Omega^{p+1}(U)$ die $(p+1)$ -Form mit $i_\nu^*(\kappa) = d\omega_\nu$, wobei $i_\nu : U_\nu \hookrightarrow U$ die Inklusionen seien, sodass $[\kappa] = \partial^*([\omega])$ gilt. Daraus folgt

$$(D_U^{p+1} \circ \partial^*)([\omega])([\tau]) = D_U^{p+1}([\kappa])(\tau) = \int_U \kappa \wedge \tau$$

Um einen Repräsentanten für $\partial_*([\tau]) \in H_c^{n-p}(U_1 \cap U_2)$ zu finden, schreibe $\tau = \tau_1 + \tau_2$ mit

$$\tau_\nu \in \Omega_c^{n-p-1}(U) \quad \text{und} \quad \text{supp}_U(\tau_\nu) \subseteq U_\nu$$

und setze dann $\sigma = j_1^*(d\tau_1) = -j_2^*(d\tau_2)$. Dann ist σ eine geschlossene $(n-p)$ -Form mit $[\sigma] = \partial_*([\tau])$. Folglich gilt

$$((\partial_*)^* \circ D_{U_1 \cap U_2})([\omega])([\sigma]) = \int_{U_1 \cap U_2} \omega \wedge \sigma$$

Nun gilt es die beiden Integrale zu vergleichen:

Wegen $\text{supp}_U(\tau_\nu) \subseteq U_\nu$ gilt

$$\int_U \kappa \wedge \tau = \int_U \kappa \wedge \tau_1 + \int_U \kappa \wedge \tau_2 = \int_{U_1} d\omega_1 \wedge \tau_1 + \int_{U_2} d\omega_2 \wedge \tau_2$$

Weiter gilt bekanntlich $d(\omega_\nu \wedge \tau_\nu) = d\omega_\nu \wedge \tau_\nu + (-1)^p \omega_\nu \wedge d\tau_\nu$ als auch

$$\int_{U_\nu} d(\omega_\nu \wedge \tau_\nu) = 0$$

(nach Stokes Theorem – M besitzt keinen Rand) und damit

$$(-1)^{p+1} \int_U \kappa \wedge \tau = (-1)^{p+1} \int_{U_1} d\omega_1 \wedge \tau_1 + (-1)^{p+1} \int_{U_2} d\omega_2 \wedge \tau_2 = \int_{U_1} \omega_1 \wedge d\tau_1 + \int_{U_2} \omega_2 \wedge d\tau_2.$$

Weiterhin gilt aber $d\tau_1|_{U_1} = j_{1*}(\sigma)$ und $d\tau_2|_{U_2} = -j_{2*}(\sigma)$, also

$$\begin{aligned} \int_{U_1} \omega_1 \wedge d\tau_1 + \int_{U_2} \omega_2 \wedge d\tau_2 &= \int_{U_1} \omega_1 \wedge j_{1*}(\sigma) - \int_{U_2} \omega_2 \wedge j_{2*}(\sigma) \\ &= \int_{U_1 \cap U_2} j_1^*(\omega_1) \wedge \sigma - \int_{U_1 \cap U_2} j_2^*(\omega_2) \wedge \sigma \\ &= \int_{U_1 \cap U_2} \omega \wedge \sigma \end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.5

Für eine Familie paarweise disjunkter offener Teilmengen $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ einer glatten Mannigfaltigkeit M mit Vereinigung U sind folgende Abbildungen Isomorphismen:

$$(i) H^p(U) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} H^p(U_\alpha), [\omega] \mapsto ([i_\alpha^*(\omega)])_{\alpha \in A}$$

$$(ii) H_c^p(U)^* \rightarrow \prod_{\alpha \in A} H_c^p(U_\alpha)^*, \beta \mapsto ((i_{\alpha*})^*(\beta))_{\alpha \in A}$$

Beweis:

Betrachte zunächst die Isomorphismen

$$\begin{aligned} \Phi^p : \Omega^p(U) &\rightarrow \prod_{\alpha \in A} \Omega^p(U_\alpha), \omega \mapsto (i_\alpha^*(\omega))_{\alpha \in A} \\ \Psi_p : \bigoplus_{\alpha \in A} \Omega_c^p(U_\alpha) &\rightarrow \Omega_c^p(U), (\omega_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto \sum_{\alpha \in A} i_{\alpha*}(\omega_\alpha) \end{aligned}$$

Weiter definieren diese Abbildungen Isomorphismen von Kettenkomplexen, wobei das Differential auf $\bigoplus_{\alpha \in A} \Omega_c^*(U_\alpha)$ gegeben ist durch

$$d((\tau_\alpha)_{\alpha \in A}) = (d\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$$

und $\bigoplus_{\alpha \in A} \Omega_c^*(U_\alpha) \subseteq \prod_{\alpha \in A} \Omega_c^*(U_\alpha) \subseteq \prod_{\alpha \in A} \Omega^*(U_\alpha)$ als Subkomplex aufgefasst wird.

Daraus erhalten wir (i) als auch einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{\alpha \in A} H_c^p(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} H_c^p(U), ([\omega_\alpha])_{\alpha \in A} \mapsto \sum_{\alpha \in A} i_{\alpha*}([\omega_\alpha]).$$

Da nun ein direktes Produkt zu einem direkten Produkt dualisiert wird, d. h.

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in A} V_\alpha \right)^* \xrightarrow{\cong} \prod_{\alpha \in A} V_\alpha^*, f \mapsto (f \circ \iota_\alpha)_{\alpha \in A},$$

folgt (ii).

Korollar 3.3.6

- (i) Jede offene Teilmenge $U \subseteq M$, diffeomorph zu \mathbb{R}^n , erfüllt die Poincaré-Dualität.
- (ii) Seien $U_1, U_2 \subseteq M$ offen und nehme an, dass U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ die Poincaré-Dualität erfüllen, dann auch $U = U_1 \cup U_2$.
- (iii) Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie paarweise disjunkter offener Teilmengen von M und nehme an jedes U_α erfüllt die Poincaré-Dualität, dann auch $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Beweis:

Für (i) bemerke, dass $H^p(U) \cong H^p(\mathbb{R}^n)$ und $H_c^{n-p}(U) \cong H_c^{n-p}(\mathbb{R}^n)$, wobei nun bekanntlich

$$H^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & ; p = 0 \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

und nach Lemma 3.3.2

$$H_c^{n-p}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & ; p = 0 \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Damit genügt es zu zeigen, dass $D_U^0 : H^0(U) \rightarrow H_c^n(U)^*$ ein Isomorphismus ist. Beachte dafür, dass D_U^0 die konstante 1-Funktion auf U auf den Basisvektor

$$\int_U : H_c^n(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

von $H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$ abbildet.

Für (ii) genügt es, dass folgende kommutative Diagramm zu betrachten:

$$\begin{array}{ccc} H^p(U) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{\alpha \in A} H^p(U_\alpha) \\ D_U^p \downarrow & & \downarrow \prod_a D_{U_\alpha}^p \\ H_c^{n-p}(U)^* & \xrightarrow{\cong} & \prod_{\alpha \in A} H_c^{n-p}(U_\alpha)^* \end{array}$$

mit den horizontalen Isomorphismen aus Proposition 3.3.5. Nach Voraussetzung von (ii) ist $\prod_a D_{U_\alpha}^p$ ein Isomorphismus und damit auch D_U^p .

Betrachte nun für (iii) das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H^p(U) & \xrightarrow{r} & H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) & \xrightarrow{j^*} & H^p(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\partial^*} & H^{p+1}(U) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow D_U^p & & \downarrow D_{U_1}^p \oplus D_{U_2}^p & & \downarrow D_{U_1 \cap U_2}^p & & \downarrow D_U^{p+1} \\ \dots & \longrightarrow & H_c^{n-p}(U)^* & \xrightarrow{r^*} & H_c^{n-p}(U_1)^* \oplus H_c^{n-p}(U_2)^* & \xrightarrow{j^*} & H_c^{n-p}(U_1 \cap U_2)^* & \xrightarrow{(-1)^{p+1}(\partial_*)^*} & H_c^{n-p-1}(U)^* \longrightarrow \dots \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert nach den vorausgehenden zwei Lemmata.

Die Voraussetzungen von (i) bedeuten, dass $D_{U_1}^p \oplus D_{U_2}^p$ und $D_{U_1 \cap U_2}^p$ für alle p Isomorphismen sind. Dass dann auch D_U^p für alle p ein Isomorphismus ist, folgt aus dem

5-Lemma:

Sind für ein kommutatives Diagramm in einer abelschen Kategorie (hier: Vektorräume)

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \xrightarrow{j} E \\ \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow n & & \downarrow p \\ A' & \xrightarrow{r} & B' & \xrightarrow{s} & C' & \xrightarrow{t} & D' \xrightarrow{u} E' \end{array}$$

die Zeilen exakt, m und p Isomorphismen, l ein Epimorphismus und q ein Monomorphismus, dann ist n ein Isomorphismus.

Beweis von Theorem 3.2.1 (Poincaré-Dualität):

Betrachte die triviale Überdeckung $\mathcal{V} = (M)$ zusammen mit der Kollektion

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq M \mid U \text{ offen}, D_U^p \text{ ist ein Isomorphismus } \forall p\}$$

Nach Korollar 3.3.6 sind alle Voraussetzungen von Satz 3.3.1 erfüllt und es folgt $M \in \mathcal{U}$.

3.4 Anwendungen

Beispiel: Berechnung der Kohomologiegruppen von $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$:

- (i) Da $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ zusammenhängend ist, gilt $H_{dR}^0(\mathbb{R}\mathbb{P}^3) = \mathbb{R}$
- (ii) Weiter wissen wir, dass $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^3) \cong \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nun ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bereits abelsch und es folgt $H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^3; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Da \mathbb{Z} torsionsfrei ist, erhalten wir nach dem universellen Koeffiziententheorem $H_{sing}^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^3; \mathbb{Z}) = 0$ und zusammen mit dem Satz von de Rham $H_{dR}^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^3) = 0$.
- (iii) Die **Poincaré-Dualität** liefert nun sofort die übrigen Kohomologiegruppen:

$$H_{dR}^p(\mathbb{R}\mathbb{P}^3) = \begin{cases} \mathbb{R} & ; p = 0, 3 \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 3.4.1

Sei M^n eine glatte Untermannigfaltigkeit mit endlichdimensionaler Kohomologie, dann ist die i -te **Betti-Zahl** gegeben durch

$$b_i(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^i(M^n).$$

Die **Euler-Charakteristik** von M^n ist definiert als

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(M).$$

Korollar 3.4.2

Sei M eine kompakte orientierbare glatte n -Mannigfaltigkeiten, so gilt für alle k

$$b_k(M) = b_{n-k}(M)$$

Satz 3.4.3

Jede kompakte (*orientierbare*) glatte Mannigfaltigkeit M von ungerader Dimension besitzt die Euler-Charakteristik $\chi(M) = 0$.

Beweis:

Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit von ungerader Dimension n , die zusätzlich noch orientierbar sei, so gilt nach der Poincaré-Dualität (Theorem 3.2.1) $H^i(M^n) \cong H^{n-i}(M^n)^*$ und folglich $b_i(M) = b_{n-i}(M)$ für alle i . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_{n-i}(M) = (-1)^n \sum_{j=0}^n (-1)^{-j} b_j(M) = - \sum_{j=0}^n (-1)^j b_j(M) \\ &\implies \chi(M) = 0 \end{aligned}$$

Im Falle, dass M nicht orientierbar ist, verwenden wir die Multiplikativität der Euler-Charakteristik unter Überlagerungen und erhalten für die 2-blättrige Orientierungsüberlagerung

$$\chi(E) = 2 \cdot \chi(M).$$

Hierbei gilt es für den Totalraum Folgendes zu bemerken:

- E bildet eine glatte Mannigfaltigkeit, da die Orientierungsüberlagerung lokal ein Homöomorphismus ist
- E ist kompakt, da endlich-blättrige Überlagerungen von Mannigfaltigkeiten eigentliche Abbildungen sind
- E ist orientierbar:
Konstruiere hierfür eine nichtdegenerierte n -Form $\tilde{\omega}$ auf E – wähle dafür auf jeder Karte $(U; \varphi)$ lokal eine (nichtverschwindende) Volumenform ω_U und setze dann für $q \in U, \alpha \in \text{Or}(T_q M)$

$$\tilde{\omega}(q; \alpha) := \sigma_{(U; \varphi)}(q; \alpha) \cdot p^*(\omega_U)(q; \alpha)$$

Damit ist der Fall M nicht orientierbar auf den Fall E orientierbar zurückzuführen.

Literatur

- [1] Ib Madsen und Jørgen Tørnehave. *From Calculus to Cohomology De Rham Cohomology and characteristic classes*. Cambridge Univ. Press, 2001. ISBN: 0521589568.
- [2] Tttrung. *Orientability of Manifolds*. URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=960446>. 18. Juli, 2006.