

Anwendungen II

Jesse Georgias

November 2025

1 Euler-Charakteristik

1.1 Historie

Der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler entdeckte circa 1758, dass für konvexe Polyeder, also ein dreidimensionaler Körper, der ausschließlich von ebenen Flächen begrenzt wird (z. B. einen Würfel, Tetraeder oder Dodekaeder), die folgende Beziehung zwischen der Anzahl der Ecken (E), Kanten (K) und Flächen (F) gilt:

$$E - K + F = 2.$$

Schnell wurde allerdings festgestellt, dass diese Formel nicht für alle kompakte, orientierbare, geschlossene Mengen gilt. Insbesondere nicht für solche welche "Löcher" aufweisen. So stellte Simon Antoine Jean L'Huilier fest, dass für eine, kompakte, orientierbare Fläche¹ T von Geschlecht g , wobei das Geschlecht abstrakt für die Anzahl der "Löcher" steht, folgende Formel gilt:

$$\chi(T) = 2 - 2g.$$

Hier ist $\chi(T)$ die Euler-Charakteristik.

Beide dieser Entdeckungen haben allerdings die erhebliche Einschränkungen, dass diese nicht für generelle n -Dimensionale Räume bzw. Mannigfaltigkeit definierbar sind. Deswegen erweiterte Poincaré, in den Jahren 1893–1895, die Definition der Euler-Charakteristik via der sogenannten Betti-Zahlen auf allgemeine n -Dimensionale Räume. Im folgenden Vortrag beschäftigen wir uns mit dem Spezialfall von n -dimensionalen (glatten) Mannigfaltigkeiten.

Example 1.1. Im Nachfolgenden dargestellt: Ein doppelter Torus. Dieser ist eine Fläche des Geschlechtes 2.



Figure 1: Ein doppelter Torus

1.2 Die Euler-Charakteristik für glatte Mannigfaltigkeiten

Definition 1.1 (Betti-Zahlen, [Ib 78]). Für eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit M , deren Kohomologie für jedes $0 \leq i \leq n$ endlich dimensional ist², dann definieren wir die **Betti-Zahlen** für jedes i wie folgt

$$b_i(M) := \dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^i(M)$$

¹also eine zwei dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit ohne Rand

²z.B. falls M kompakt ist.

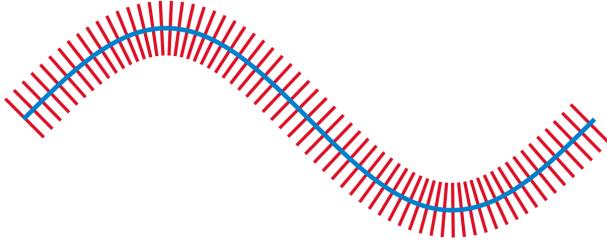


Figure 2: Tubuläre Umgebung der Mannigfaltigkeit M

Remark 1.1. Mit einer der wichtigsten Gründe für endliche Dimensionalität von glatten Mannigfaltigkeit ist Kompaktheit (wie bereits in der Fußnote erwähnt). Dies ist interessant, da viele der gängigen Beispiele von glatten Mannigfaltigkeit (z.B. $S^n, \mathbb{R}P^n, T^n$) kompakt sind, wir so wohldefinierte Betti-Zahlen erhalten. Die endliche Dimensionalität der deRham-Kohomologie wird durch die folgende Proposition gezeigt.

Proposition 1.1 (Endliche Dimensionalität der deRham-Kohomologie von kompakten Mannigfaltigkeit, [Ib 78]). Für jede n -dimensionale, kompakte, glatte Mannigfaltigkeit M , sind alle deRham-Kohomologie Räume $H_{\text{dR}}^d(M), 0 \leq d \leq n$, endlich dimensional.

Proof. (Skizze) Nach dem **Einbettungssatz von Whitney** (Thm. 8.11, [Ib 78]), können wir M in \mathbb{R}^{n+k} für ein gewisses k einbetten. Somit ist M eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} , so dass wir nach dem **Existenzsatz von Tubulären Umgebungen** (Thm. 9.23, [Ib 78]) eine offene Umgebung V von M in \mathbb{R}^{n+k} finden können, sodass eine glatte (zur Inklusion) links-inverse Abbildung $r : V \rightarrow M$ existiert. Weiterhin können wir aufgrund der Kompaktheit von M , endlich viele offene Kugeln, $U_1, \dots, U_r \subset \mathbb{R}^{n+k}$ finden, deren Vereinigung U , M überdeckt und in V enthalten ist, also $M \subseteq U \subseteq V$. Somit erhalten wir eine glatte inclusion $i : M \rightarrow U$ und eine links-inverse, glatte Abbildung $r|_U : U \rightarrow M$. Es gilt also $r|_U \circ i = \text{id}_M$. Dies bedeutet, dass auf den deRham-Kohomologie Räumen, dann Folgendes gilt.

$$H_{\text{dR}}^d(i) \circ H_{\text{dR}}^d(r|_U) = \text{id}_{H_{\text{dR}}^d(M)}$$

und die Kohomologie-Abbildung $H_{\text{dR}}^d(i) : H_{\text{dR}}^d(U) \rightarrow H_{\text{dR}}^d(M)$ somit surjektiv ist.

Da diese Kugeln konvex sind so können wir **Theorem 5.5**, [Ib 78] anwenden welches besagt, dass in diesem Fall $H_{\text{dR}}^d(U)$ endlich dimensional ist. Wegen der Surjektivität der Kohomologie Abbildung, so ist $H_{\text{dR}}^d(M)$ so auch endlich dimensional. \square

Example 1.2. Im folgenden Beispiel ist die blaue Linie die Mannigfaltigkeit M , die roten Linien stellen jene Fasern dar, welche schließlich die tubuläre Umgebung bilden.

Ausgehend von 1.1, können wir die Euler-Charakteristik wie folgt definieren.

Definition 1.2 (Euler-Charakteristik, [Ib 78]). Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ wie in 1.1. Dann definieren wir die **Euler-Charakteristik** $\chi(M) \in \mathbb{Z}$ wie folgt

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(M)$$

Remark 1.2. Man beachte, dass die Definition 1.1 und 1.2, via der Singulären Theorie, auf generelle Topologische Räume X erweitert werden können, unter der Annahme, dass es nur endlich viele $H^i(X; \mathbb{R}) \neq 0$ gibt und welche alle endlich dimensional sind. Diese Eigenschaft wird *von endlichem Typ* genannt. Wir erhalten so ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $H^k(X; \mathbb{R}) = 0$ für alle $k > n$ und können die Euler-Charakteristik wie folgt definieren

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H^i(X; \mathbb{R}).$$

2 Der Satz von Poincaré-Hopf

Die zentrale Frage welche sich aus der Definition der Euler-Charakteristik ergibt ist wofür diese benutzt werden kann. Insbesondere da diese weniger Informationen beinhaltet als die Betti-Zahlen, welche genutzt

werden um die Charakteristik zu definieren. Jedoch können wir Mithilfe des Hauptsatzes dieses Vortrages via der Euler-Charakteristik zwei höchst interessante Aussagen über eine Mannigfaltigkeit M treffen. So können wir

- bestimmen wie viele, mit Vielfachheit gezählte, (isolierte) Nullstellen ein glattes Vektorfeld X auf M besitzt.
- untere Schranken für die Anzahl an kritischen Punkten von bestimmten³ (glatten) Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmen.

Zunächst brauchen wir allerdings folgende Definitionen.

Definition 2.1 (Index eines Vektorfeldes & Abbildungsgrad). Sei M eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei X gutes Tangentialvektorfeld auf M , mit einer isolierten Nullstelle p_0 . Wobei isoliert in diesem Fall bedeutet, dass $X(p_0) = 0$ und eine offene Umgebung $U \subseteq M$ existiert, so dass $X|_{U \setminus \{p_0\}} \neq 0$. Weiterhin sei (V, h) eine glatte Karte um p_0 , so dass $h(p_0) = 0$. Weiterhin wählt man ein $\rho > 0$, so dass 0 die einzige Nullstelle in innerhalb der Kugel ρB^n ist. Der **lokale Index des Vektorfeldes** um p_0 ist definiert durch den Abbildungsgrad der Abbildung

$$f_\rho : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, x \mapsto \frac{(h^{-1})^* X(\rho x)}{\|(h^{-1})^* X(\rho x)\|}$$

und wird mit $\text{Ind}(X, p_0)$ notiert. Im weiteren werden wir das ρ aus der Notation weglassen. Der **Abbildungsgrad** $\deg(f)$ ist gegeben durch die Multiplikation, welche f auf den $(n-1)$ -ten Kohomologie Gruppen induziert. Formell ist $\deg(f)$ bzw. $\text{Ind}(X, p_0)$ jene eindeutige Zahl für welche für jede $(n-1)$ -Form ω , folgende Gleichung gilt:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f^*(\omega) = \deg(f) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega.$$

Remark 2.1. Man bemerke, dass die obige Definition M ohne Einbettung betrachtet. Jedoch ist es für den Beweis des Hauptsatzes deutlich einfacher M als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+k} für geignetes k zu betrachten. Deswegen ist im Folgenden $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine feste, glatte, n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+k} .

Example 2.1. Sei $M = \mathbb{R}^2$ und X gibt die Windströmung auf der Ebene an. Weiterhin ist z ein Punkt an dem Windstille herrscht, z.B. das Auge eines Hurricanes. Dann ist ∂B ein kleiner Kreis den wir um diesen windstillen Punkt ziehen. Wenn man nun über diesen Kreis läuft, dabei eine Fahne in der Hand hält und man nur darauf achtet, in welche Himmelsrichtung sich die Fahne dreht, dann gilt für den Index des Vektorfeldes:

- **Index +1:** Die Fahne dreht sich genau einmal um ihre eigene Achse mit der Laufrichtung.
- **Index -1:** Die Fahne dreht sich genau einmal um ihre eigene Achse entgegen der Laufrichtung.
- **Index 0:** Die Fahne wackelt vielleicht hin und her, zeigt aber ohne vollständige Rotation am Ende wieder in die gleiche Richtung wie am Anfang.

In der folgenden Abbildung sind einige solcher Vektorfelder visualisiert.

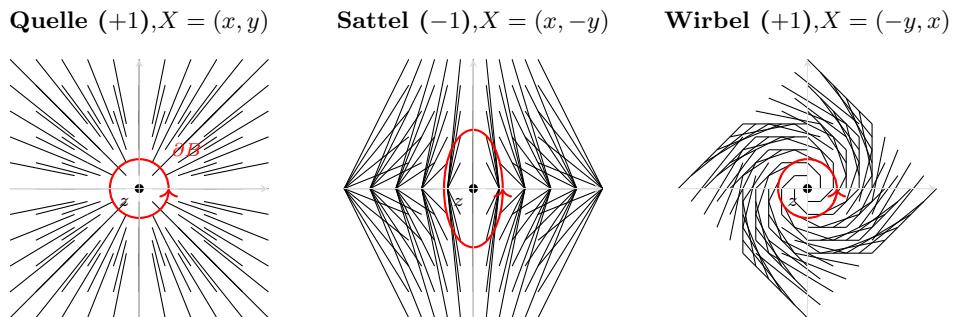


Figure 3: Visualisierung des Vektorfeld-Index um eine isolierte Nullstelle z . Links und rechts beträgt der Index +1 (Vektoren drehen mit dem Weg), in der Mitte -1 (Vektoren drehen gegen den Weg).

³um genau welche Funktionen es sich handelt, wird im Laufe des Vortrages ersichtlich

Theorem 2.1. (Poincare-Hopf) Sei X ein glattes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M . Falls X nur isolierte Nullstellen hat, dann gilt

$$\text{Ind}(X) := \sum_{z; X(z)=0} \text{Ind}(X, z) = \chi(M)$$

3 Beweis des Satzes von Poincare-Hopf

Der Beweis erfolgt über die Einführung einer Morse-Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, also eine Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ deren kritische Punkte, also die Punkte $p \in M$ an denen das Differential verschwindet ($d_p f = 0$), nicht degeneriert sind. Nicht Degeneriert heißt in diesem Fall, dass an einem kritischen Punkt $p \in M$, die Hesse-Matrix in einer lokalen Karte h

$$H(f)_p := \left(\frac{\partial^2(f \circ h^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}(h(p)) \right)$$

invertierbar ist. Wir teilen den Beweis in zwei Teile auf.

1. **Verbindung zum Index:** Man zeigt, dass der Index eines Vektorfeldes gleich der alternierenden Summe der kritischen Punkte einer Morse-Funktion ist (Theorem 12.11).
2. **Verbindung zur Euler-Charakteristik:** Man zeigt, dass die Euler-Charakteristik ebenfalls gleich dieser alternierenden Summe ist (Theorem 12.16).

Essentiell für den ersten Punkt ist der folgende Fakt, welcher ohne Beweis präsentiert wird.

Theorem 3.1 (Theorem 11.27, [Ib 78]). Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n -dimensionale, glatte, kompakte Untermannigfaltigkeit und sei N_ϵ eine tubuläre Umgebung von Radius ϵ um M . Bezeichne $g : \partial N_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^{n+k-1}$ die nach außen gerichtete Gauß Abbildung. Wenn nun X ein beliebiges glattes Vektorfeld auf M ist, welches nur isolierte Nullstellen besitzt. Dann gilt Folgendes

$$\text{Index}(X) = \deg(g)$$

Proof. Ausgelassen. □

Remark 3.1. Dieses Theorem sagt aus, dass alle glatten Vektorfelder auf M , welche nur isolierte Nullstellen haben den gleichen Index haben. Somit reicht es den ersten Punkt für genau eines dieser Vektorfelder zu zeigen.

Die Kombination beider Resultate liefert den Satz von Poincaré-Hopf.

3.1 Teil 1: Verbindung zum Index

Wir betrachten eine Morse-Funktion f auf M und bezeichnen mit c_λ die Anzahl der kritischen Punkte vom Index λ .

Theorem 3.2 (Theorem 12.11, [Ib 78]). Sei M^n eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit und X ein glattes Tangentialvektorfeld mit isolierten Singularitäten. Sei f eine Morse-Funktion und c_λ die Anzahl der kritischen Punkte vom Index λ . Dann gilt:

$$\text{Index}(X) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda c_\lambda$$

Proof. Da alle Vektorfelder mit isolierten Singularitäten auf einer kompakten Mannigfaltigkeit denselben Index haben (siehe Theorem 11.27), können wir ein spezielles Vektorfeld wählen. Wir wählen ein Vektorfeld X , das *gradienten-artig* für die Morse-Funktion f ist.

Definition 3.1. Sei $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ eine Morse-Funktion. Eine glatte Tangentialvektorfeld X auf M heißt **gradienten-artig**, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind

1. Für jeden nicht kritischen Punkt $p \in M$, gilt $d_p f(X(p)) > 0$

2. Falls $p \in M$ ein kritischer Punkt von f ist, dann existiert ein C^∞ -Chart $h : U \rightarrow h(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ und $h(p) = 0$, so dass

$$f \circ h^{-1}(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2, \quad x \in h(U)$$

$$\text{and } (h^{-1})^* X|_U = \text{grad}(f \circ h^{-1})$$

Wir haben zudem folgende Lemmata

Lemma 3.1 (Lemma 12.8). Zur jeder Morse-Funktion existiert ein solches gradienten-artiges Vektorfeld.

Proof. Ausgelassen. \square

Wir wählen ein solches Feld so, so dass die Nullstellen genau die kritischen Punkte von f sind.

Lemma 3.2 (Lemma 12.9). Sei f eine Morse-Funktion auf M und X ein glattes Tangentialvektorfeld so dass $d_p f(X(p)) > 0$ für jeden nicht kritischen Punkt $p \in M$. Wenn $p_0 \in M$ ein kritischer Punkt von f mit Index λ und $X(p_0) = 0$, dann ist der Index des Vektorfeldes X gegeben durch

$$\text{Ind}(X; p_0) = (-1)^\lambda$$

Proof. Wir wählen ein gradienten-artiges Vektorfeld \tilde{X} . Nach der Definition eines gradienten-artigen Vektorfeldes und der Form einer Morse Funktion nahe eines kritischen Punktes, so wissen wir

$$\text{Ind}(\tilde{X}; p_0) = (-1)^\lambda.$$

Sei U eine offene Umgebung von p_0 , welche diffeomorph zu \mathbb{R}^n ist. Wir wählen U so, dass p_0 der einzige kritische Punkt in U ist.

Die Ungleichungen aus den Annahmen und der Definition von gradienten-artigen Feldern implizieren:

$$d_p f(X(p)) > 0 \quad \text{und} \quad d_p f(\tilde{X}(p)) > 0,$$

für $p \in U - \{p_0\}$. Das zeigt, dass $X(p)$ und $\tilde{X}(p)$ gehören zu dem selben offen halb-Raum in $T_p M$ definiert über den Kern von $d_p f$. Präzisiert definiert $\text{Ker}(d_p f)$ eine Hyperebene im Tangentialraum und teilt diesen so in die beiden Halbräume $\{v \mid d_p f(v) > 0\}$ und $\{v \mid d_p f(v) < 0\}$.

Dann ist die lineare Kombination

$$(1-t)X(p) + t\tilde{X}(p) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

niemals null für $p \neq p_0$. Dies definiert eine Homotopie zwischen \tilde{X} und X gesehen als Abbildungen von $U - \{p_0\}$ zu $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Da der Index unter Homotopie invariant ist, so haben wir:

$$\text{Ind}(X; p_0) = \text{Ind}(\tilde{X}; p_0) = (-1)^\lambda.$$

\square

Der Gesamtindex ist die Summe der lokalen Indizes:

$$\text{Index}(X) = \sum_p \text{Ind}(X; p) = \sum_{\lambda=0}^n c_\lambda (-1)^\lambda$$

Damit ist der erste Teil gezeigt. \square

3.2 Teil 2: Die Euler-Charakteristik

Nun muss gezeigt werden, dass die alternierende Summe der kritischen Punkte tatsächlich der Euler-Charakteristik entspricht.

Theorem 3.3 (Theorem 12.16). Ist f eine Morse-Funktion auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M , dann gilt:

$$\chi(M^n) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda c_\lambda$$

Proof. Seien $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ die kritischen Werte von f . Wir betrachten die Sublevel-Mengen $M(a) = \{p \in M \mid f(p) < a\}$.

Lemma 3.3 (Lemma 12.12). Wenn im Intervall $[a_1, a_2]$ keine kritischen Werte liegen, dann sind $M(a_1)$ und $M(a_2)$ diffeomorph.

Example 3.1. Wir betrachten das Beispiel der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der Höhenfunktion $f(p) = z$. Die kritischen Punkte sind der Südpol (Minimum, Index 0) und der Nordpol (Maximum, Index 2).

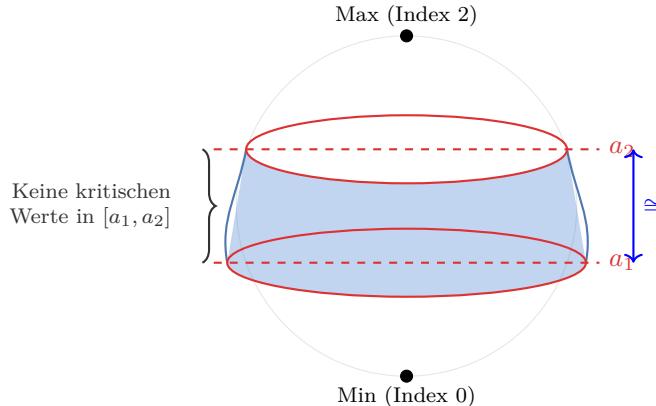


Figure 4: **Lemma 12.12:** Das Intervall $[a_1, a_2]$ enthält keine kritischen Punkte (Pole). Die Sublevel-Menge wächst lediglich um einen zylindrischen Streifen an; $M(a_1)$ ist diffeomorph zu $M(a_2)$.

Proof. Wähle $c_1 < a_1$ und $c_2 > a_2$, so dass das offene Intervall $J = (c_1, c_2)$ keine kritischen Werte von f enthält. Da M kompakt ist, können wir Theorem C.2 (Appendix) auf $N = f^{-1}(J)$ anwenden. Wir erhalten somit eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit Q und einen Diffeomorphismus $\Phi : Q \times J \rightarrow N$, so dass $f \circ \Phi(q, t) = t$ für $q \in Q, t \in J$.

Betrachte einen streng monoton steigenden Diffeomorphismus $\rho : J \rightarrow J$, der außerhalb eines abgeschlossenen beschränkten Teilintervalls von J die Identität ist. Mithilfe von ρ können wir den Diffeomorphismus

$$\Psi_\rho : M \rightarrow M; \quad \Psi_\rho(p) = \begin{cases} \Phi \circ (\text{id}_Q \times \rho) \circ \Phi^{-1}(p) & \text{falls } p \in N \\ p & \text{falls } p \notin N \end{cases}$$

konstruieren. Wenn $a \in J$, dann bildet Ψ_ρ die Menge $M(a)$ diffeomorph auf $M(\rho(a))$ ab. Es genügt, ρ so zu wählen, dass $\rho(a_1) = a_2$. Eine mögliche Wahl ist

$$\rho(t) = t + \int_{c_1}^t g(x)dx,$$

wobei $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Bedingungen erfüllt wie $\text{supp}(g) \subseteq J$, $g(x) > -1$ und $\int_{c_1}^{a_1} g(x)dx = a_2 - a_1$ sowie $\int_{c_2}^{a_2} g(x)dx = 0$. \square

Lemma 3.4 (Lemma 12.13). Angenommen, a ist ein kritischer Wert und p_1, \dots, p_r sind die kritischen Punkte in $f^{-1}(a)$. Sei λ_i der Index von p_i . Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und disjunkte offene Umgebungen U_i von p_i , sodass gilt:

1. p_1, \dots, p_r sind die einzigen kritischen Punkte in $f^{-1}([a - \epsilon, a + \epsilon])$.
2. U_i ist diffeomorph zu einer offenen, zusammenziehbaren Teilmenge von \mathbb{R}^n .
3. $U_i \cap M(a - \epsilon)$ ist diffeomorph zu $S^{\lambda_i-1} \times V_i$, wobei V_i eine offene, zusammenziehbare Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-\lambda_i+1}$ ist (insbesondere ist $U_i \cap M(a - \epsilon) = \emptyset$, falls $\lambda_i = 0$).
4. $M(a + \epsilon)$ ist diffeomorph zu $U_1 \cup \dots \cup U_r \cup M(a - \epsilon)$.

Proposition 3.1 (Proposition 12.14). In der Situation von Lemma 12.13 nehmen wir an, dass $M(a - \epsilon)$ endlich-dimensionale Kohomologie besitzt. Dann gilt dasselbe für $M(a + \epsilon)$, und es gilt:

$$\chi(M(a + \epsilon)) = \chi(M(a - \epsilon)) + \sum_{i=1}^r (-1)^{\lambda_i}.$$

Example 3.2. Betrachte die Höhenfunktion auf einem senkrechten Torus. Wir starten mit der leeren Menge ($\chi = 0$). An jedem kritischen Punkt ändert sich die Euler-Charakteristik gemäß:

$$\chi_{\text{neu}} = \chi_{\text{alt}} + (-1)^{\text{Index}}$$

- **Minimum p (Index 0):** $\chi = 0 + (-1)^0 = 1$.
- **Sattel q (Index 1):** $\chi = 1 + (-1)^1 = 0$.
- **Sattel r (Index 1):** $\chi = 0 + (-1)^1 = -1$.
- **Maximum s (Index 2):** $\chi = -1 + (-1)^2 = 0$.

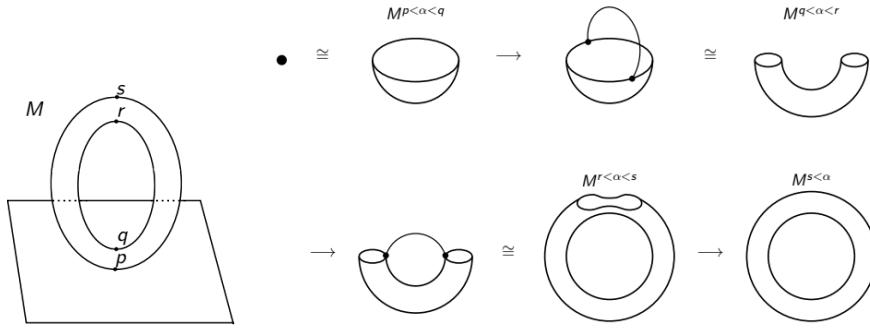


Figure 5: Das Ankleben der Henkel an den Torus

Wenn der kritische Wert a passiert wird, ändert sich der Homotopietyp von $M(a - \epsilon)$ zu $M(a + \epsilon)$ durch das Anheften von r „Henkeln“ (den Umgebungen U_i). Jeder dieser Henkel ist homotopieäquivalent zum Ankleben einer Zelle der Dimension λ_i .

Dies folgt aus den Eigenschaften der Umgebungen U_i und deren Schnittmenge mit dem „alten“ Niveau $M(a - \epsilon)$:

1. **Der Henkel (U_i) ist zusammenziehbar:** Gemäß Lemma 12.13 (ii) ist jede Umgebung U_i diffeomorph zu einer offenen Menge in \mathbb{R}^n und somit homotopietheoretisch äquivalent zu einem Punkt oder einer Vollkugel (Zelle) $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$.
2. **Der Klebebereich ist eine Sphäre ($S^{\lambda-1}$):** Gemäß Lemma 12.13 (iii) ist der Durchschnitt $U_i \cap M(a - \epsilon)$ (wo der Henkel an die untere Mannigfaltigkeit angeklebt wird) homotopieäquivalent zur Sphäre S^{λ_i-1} .

Zusammenfassend entspricht das Passieren eines kritischen Punktes vom Index λ homotopietheoretisch dem Prozess des Anklebens einer λ -Zelle e^λ entlang ihrer Rand-Sphäre $S^{\lambda-1}$:

$$M(a + \epsilon) \simeq M(a - \epsilon) \cup_{S^{\lambda-1}} e^\lambda$$

Es gilt für die Euler-Charakteristik:

$$\chi(M(a + \epsilon)) = \chi(M(a - \epsilon)) + (-1)^\lambda$$

Beginnen wir mit der leeren Menge und fügen sukzessive alle kritischen Punkte hinzu, so summiert sich die Änderung der Euler-Charakteristik:

$$\chi(M) = \sum_{p \text{ kritisch}} (-1)^{\text{Index}(p)} = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda c_\lambda$$

□

3.3 Zusammenfassung & Konsequenzen

Durch Kombination von Theorem 12.11 und Theorem 12.16 erhalten wir:

$$\text{Index}(X) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda c_\lambda = \chi(M)$$

Dies beweist den Satz von Poincaré-Hopf.

Daraus ergeben sich folgende zentrale Konsequenzen:

1. **Satz vom Igel (Existenz von Nullstellen):** Ist $\chi(M) \neq 0$, so besitzt jedes stetige Tangentialvektorfeld auf M mindestens eine Nullstelle. *Beispiel:* Eine Sphäre S^n hat genau dann ein nullstellenfreies Vektorfeld, wenn n ungerade ist (da für gerades n gilt $\chi(S^n) = 2 \neq 0$).
2. **Verschwinden der Euler-Charakteristik in ungeraden Dimensionen:** Für jede kompakte Mannigfaltigkeit M ungerader Dimension gilt $\chi(M) = 0$. Dies folgt aus der Betrachtung einer Morse-Funktion f und $-f$.
3. **Verbindung zur Morse-Theorie:** Die Euler-Charakteristik lässt sich allein aus den kritischen Punkten einer Morse-Funktion f berechnen:

$$\chi(M) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda c_\lambda,$$

wobei c_λ die Anzahl der kritischen Punkte mit Index λ ist.

4. **Unabhängigkeit vom Vektorfeld:** Die Summe der Indizes ist eine topologische Invariante. Sie hängt nur von der Mannigfaltigkeit M ab, nicht von der speziellen Wahl des Vektorfeldes X .

4 Beispiel: Der reelle projektive Raum $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$

Wir betrachten den reellen projektiven Raum $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ als den Quotientenraum der Sphäre S^n unter der Identifikation antipodaler Punkte $x \sim -x$.

4.1 Die Morse-Funktion

Wir definieren zunächst eine Funktion auf der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$f : S^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n a_i x_i^2,$$

wobei $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$ reelle Konstanten sind. Da $f(x) = f(-x)$ gilt (die Funktion ist gerade), induziert sie eine wohldefinierte glatte Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}([x]) = f(x).$$

4.2 Kritische Punkte und Indizes

Die kritischen Punkte von f auf S^n liegen genau auf den Koordinatenachsen, also bei den Einheitsvektoren $\pm e_0, \pm e_1, \dots, \pm e_n$. Das sind insgesamt $2(n+1)$ Punkte.

Auf dem Quotientenraum $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ werden $\pm e_i$ zu einem einzigen Punkt $p_i = [e_i]$ identifiziert. Somit besitzt \tilde{f} genau $n+1$ kritische Punkte:

$$\text{Krit}(\tilde{f}) = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}.$$

Der Index λ_i des kritischen Punktes p_i ist die Anzahl der Richtungen, in denen die Funktion abnimmt. Da wir die Koeffizienten $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ gewählt haben, nimmt die Funktion bei p_i in genau i Richtungen ab (nämlich in Richtung der Achsen x_0, \dots, x_{i-1}). Daher gilt:

$$\text{Index}(p_i) = i.$$

4.3 Berechnung der Euler-Charakteristik

Einsetzen in die Poincaré-Hopf-Formel liefert:

$$\chi(\mathbb{R}\mathbf{P}^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^{\text{Index}(p_i)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n.$$

Dies führt zu dem bekannten Ergebnis:

$$\chi(\mathbb{R}\mathbf{P}^n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade ist (die Summe hat } n+1 \text{ ungerade Terme),} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade ist (die Summe hat } n+1 \text{ gerade Terme).} \end{cases}$$

4.4 Visualisierung für $n = 2$ ($\mathbb{R}P^2$)

Example 4.1. Die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}P^2$ wird durch die Sphäre S^2 mit identifizierten Antipoden ($x \sim -x$) dargestellt.

- **Funktion:** $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
- • **Minimum (p):** Auf der x -Achse (Wert 1). Index $\lambda = 0$.
- • **Sattel (q):** Auf der y -Achse (Wert 2). Index $\lambda = 1$.
- • **Maximum (s):** Auf der z -Achse (Wert 3). Index $\lambda = 2$.

Flusslinien (Pfeile): Die Linien verbinden die kritischen Punkte entlang des steilsten Anstiegs. Sie verlaufen exakt auf den Großkreisen in der xy -Ebene (blau) und der yz -Ebene (rot).

Euler-Charakteristik: $\chi(\mathbb{R}P^2) = \sum(-1)^\lambda = 1 - 1 + 1 = 1$.

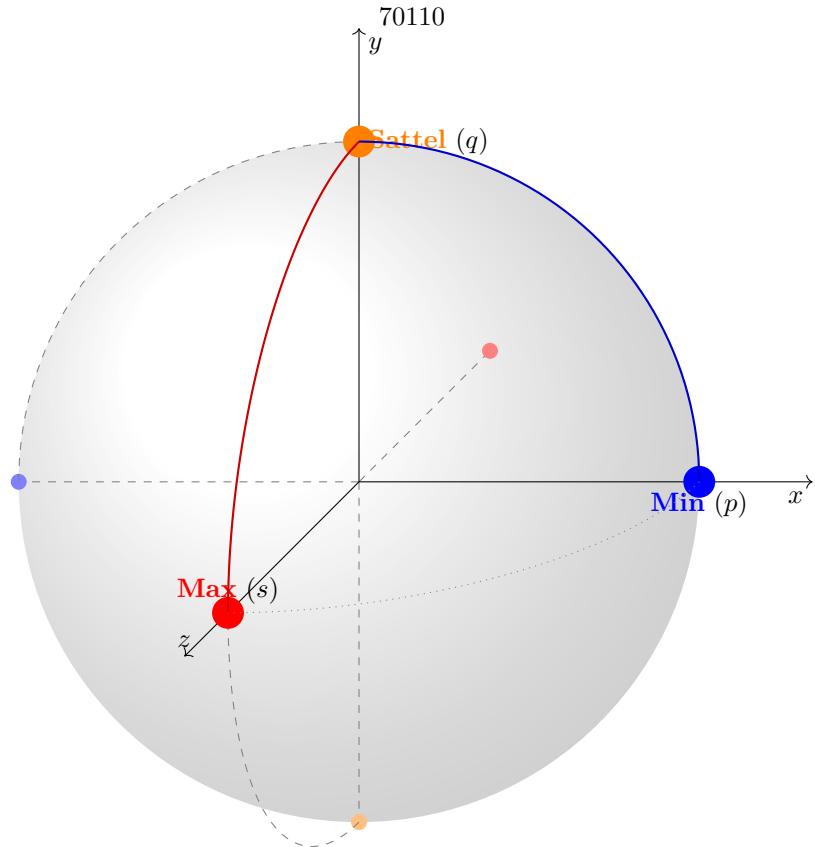


Figure 6: Visualisierung der kritischen Punkte und Flusslinien im Koordinatensystem.

References

- [Ib 78] Jørgen Tornehave Ib Madsen. *From Calculus to Cohomology*. Cambridge university press, 1978. URL: [https://cjhb.site/Files.php/Books/\(Uncategorized\)/From%20calculus%20to%20cohomology%20de%20Rham%20cohomology%20and%20characteristic%20classes%20by%20Ib%20Henning%20Madsen%2C%20J%C3%B8rgen%20Tornehave%20\(z-lib.org\)%20.pdf](https://cjhb.site/Files.php/Books/(Uncategorized)/From%20calculus%20to%20cohomology%20de%20Rham%20cohomology%20and%20characteristic%20classes%20by%20Ib%20Henning%20Madsen%2C%20J%C3%B8rgen%20Tornehave%20(z-lib.org)%20.pdf).