

Anwendungen I

Wir wollen heute die ersten Anwendungen der de Rham-Kohomologie auf klassische Probleme der Topologie kennenlernen:

- Brouwer'scher Fixpunktsatz
- Satz vom Igel
- Satz von der Invarianz der Dimension
- " " " " des Gebiets
- Vektorfelder auf Sphären
- Separationssätze von Jordan-Brouwer

Wir beginnen mit einer kurzen Erinnerung.

1. H_{DR}^* ist eine Kohomologietheorie, definiert für

m. M $H^p(M)$ glatte Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen.



n. N $H^p(N)$

Axiome (Eilenberg-Steenrod-Axiome)

I. $H^p =$ Funktoren $id^* = id$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

II. Homotopieinvarianz $f \simeq g \implies f^* = g^*$

III. laufe exakte Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\dots \rightarrow H^p(A \cup B) \xrightarrow{I} H^p(A) \oplus H^p(B) \xrightarrow{J} H^p(A \cap B) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A \cup B) \rightarrow \dots$$

laufe exakte Sequenz für Paare $M_0 \subseteq M$

$$\dots \rightarrow H^p(M, M_0) \rightarrow H^p(M) \rightarrow H^p(M_0) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(M, M_0) \rightarrow \dots$$

IV Ausschneidung: $H^p(M, M_0) \cong H^p(M - A, M_0 - A)$

Einklängungsisomorphismus $H^p(M, M_0) \cong H^{p+1}(M \times I, M_0 \times I \cup M \times \partial I)$

2. Erste Berechnungen

$$M = *$$

□

$$\mathbb{R}$$

per Hand

$$M = S^0 = \{\pm 1\}$$

$$\mathbb{R}^2$$

⇐ Additionstheorem 3.3

$$M = \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}$$

⇐ Poincaré-Lemma

$n \geq 1,$

$$M = \mathbb{R}^n \setminus 0$$

$$p = 0 \quad 1 \quad \dots \quad n-2 \quad n-1$$

$$\mathbb{R}$$

$$0$$

$$\dots$$

$$0$$

$$\mathbb{R}$$

⇐ MV-Segment

$$\simeq \int$$

$$S^{n-1}$$

$$\mathbb{R}$$

$$0$$

$$\dots$$

$$0$$

$$\mathbb{R}$$

Homotopie-Zuv.

Weitere Berechnungen?

$$H^0 M \simeq \mathbb{R}^{\pi_0 M}$$

Können wir Erzeuger finden?

Können wir induzierte Abbildungen berechnen?

3. Approximationssätze (Lemma 6.6 u. MT)

$U \subset \mathbb{R}^n$, off $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, f

(i) Jede stetige Abbildung $f: U \rightarrow V$ ist homotop zu einer glatten Abbildung.

(ii) Sind zwei glatte Abbildungen $f_0, f_1: U \rightarrow V$ ^{homotop} homotop, dann existiert auch eine glatte Homotopie, d.h. eine glatte Abbildung $F: U \times \mathbb{R} \rightarrow V$ mit $f_0(x) = F(x, 0)$, $f_1(x) = F(x, 1)$ und $F(x, t_1) = F(x, t_2)$ für alle $t_1, t_2 \geq 1$ oder $t_1, t_2 \leq 0$.

Ein analoger Satz gilt für beliebige Mannigfaltigkeiten M, N anstelle von U, V .

14

Satz von der Invarianz der Dimension (von \mathbb{R}^n)

Ist $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, so ist $m = n$.

↑
Homöomorph

Beweis: Gibt es einen Homöomorphismus, so auch ein Diffeomorphismus $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Sei $z \in \mathbb{R}^n$, so sei $w := f(z) \in \mathbb{R}^m$, und wir haben einen Diffeomorphismus

$$g = f|: \mathbb{R}^n - z \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m - w$$

g^* müßte ein Isomorphismus

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^n - z) \xleftarrow{\quad} H^{n-1}(\mathbb{R}^m - w) : g^*$$

induzieren. Das widerspricht aber unseren Bedingungen, sollte $m \neq n$ sein. ▣

NB: Das ist die gleiche Beweisstrategie wie $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^1$, was man mit $\pi_0(\mathbb{R}^2 - 0) \neq \pi_0(\mathbb{R}^1 - 0)$ beweist.

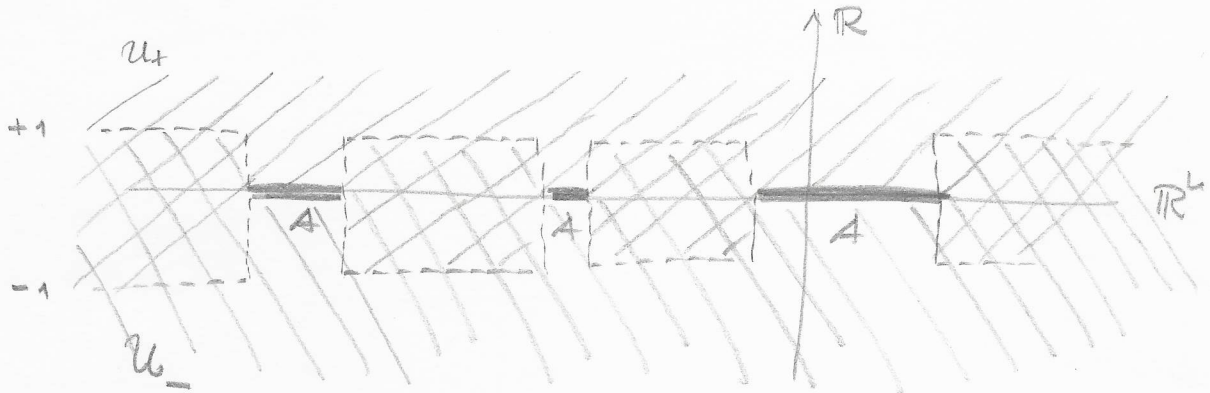
Komplemente in \mathbb{R}^n bzw. in \mathbb{R}^{n+1}

Sei $A \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abgeschlossen, und $A \neq \mathbb{R}^n$.

Dann gilt:

- (i) $H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong H^p(\mathbb{R}^n - A) \quad (p \geq 1)$
- (ii) $H^1(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong H^0(\mathbb{R}^n - A) / \mathbb{R} \cdot 1$
- (iii) $H^0(\mathbb{R}^{n+1} - A) \cong \mathbb{R}$

Beweis Die letzte Aussage ist klar. Für (i) und (ii) betrachten wir folgende Zerlegung von $\mathbb{R}^{n+1} - A$



- 3) $u_+ \cup u_- = \mathbb{R}^{n+1} - A$ 1) $u_+, u_- = \text{offen}$
- 4) $u_+ \cap u_- = (\mathbb{R}^n - A) \times]-1, +1[$ 2) $u_+, u_- \text{ zus. zickbar}$
- 5) $\begin{matrix} \cong \\ \downarrow \text{pr} \\ \mathbb{R}^n - A \end{matrix}$

Die MV-Sequenz liefert uns für alle $p \geq 1$ Isomorphismen

$$\partial^k : H^p(\mathbb{R}^n - A) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A)$$

Den Fall $p=0$ betrachte man in der MV-Sequenz separat. □

Wir wollen für die obige Situation noch die Spiegelung 16

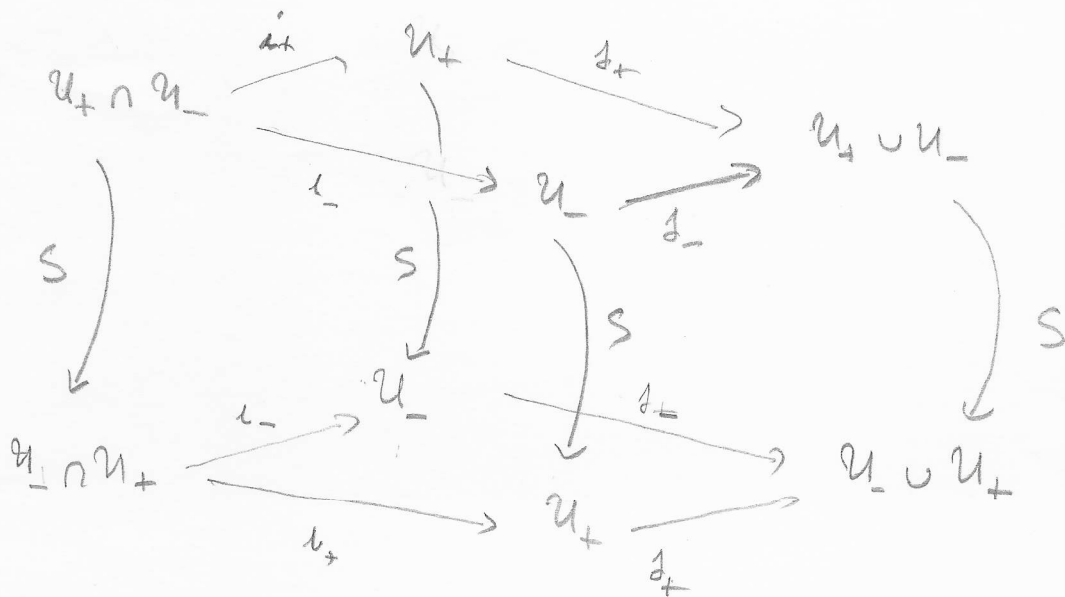
$S: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $S(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$
 an $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ betrachten. Wir haben

1) S hält A (und ganz \mathbb{R}^n) fest, also ist $\mathbb{R}^{n+1} - A$ invariant unter f . Wir wollen zeigen:

$S^*: H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A)$
 ist Multiplikation mit -1 .

2) Unsere Zerlegung U_+, U_- ist nicht invariant unter S , aber $S(U_+) = U_-$, $S(U_-) = U_+$.

Also ist S eine Abbildung von Überdeckungen



Und wir erhalten ein System von induzierten Abbildungen von H^p -Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \xrightarrow{I} & H^p U_+ \oplus H^p U_- & \xrightarrow{J} & H^p(U_+ \cap U_-) & \xrightarrow{\partial^*} & H^p(U_+ \cup U_-) & \xrightarrow{I} \\
 & \uparrow S_-^* & & \uparrow S_0^* & & \uparrow S^* & \\
 \xrightarrow{I'} & H^p U_- \oplus H^p U_+ & \xrightarrow{J'} & H^p(U_- \cap U_+) & \xrightarrow{\partial^*} & H^p(U_- \cup U_+) & \xrightarrow{I'}
 \end{array}$$

Hier ist $I = (i_+^*, i_-^*)$, und $J = j_+^* - j_-^*$,
 $I' = (i_-^*, i_+^*) = \text{tau} \circ I$, $J' = j_-^* - j_+^* = -J$.

Und wir haben $S_-^* = (S_+^*)^{-1}$.

Wenn wir in $H^p U_+$ und $H^p U_-$ über S_-^* bzw. S_+^* passende Basen wählen, so schreibt sich dies in Elementen

$$\begin{array}{ccccc}
 (b, a) & \xrightarrow{J} & b - a & \xrightarrow{\quad} & c \\
 \uparrow & & \uparrow -\text{id} = S_0^* & & \downarrow S \\
 (a, b) & \xrightarrow{-J} & a - b & \xrightarrow{\quad} & c
 \end{array}$$

Korollar Sei $A \in GL_n(\mathbb{R})$, dann induziert



100

Korollar Sei $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$$\text{JSL } f_A : \mathbb{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \infty \longrightarrow \mathbb{S}^n$$
$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & Ax \\ \infty & \longrightarrow & \infty \end{array}$$

dann ist $f_A^* : H_{dR}^n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_{dR}^n(\mathbb{S}^n)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

die Multiplikation mit $\det(A) / |\det(A)|$.

Beweis : $GL_n(\mathbb{R}) = \underbrace{GL_n^+(\mathbb{R}) \cup GL_n^-(\mathbb{R})}_{SL_n(\mathbb{R})}$ hat zwei

Wegkomponenten: die Restriktion auf $\det(A) > 0$ und solche mit $\det(A) < 0$. Wir wählen für A ein Weg nach $\mathbb{1}$ bzw. nach S . Dies liefert eine Homotopie $f_A \simeq \text{id}$ bzw. $f_A \simeq S$. Wegen der Homotopieinvarianz folgt die Behauptung $f_A^*(c) = c$ bzw. $f_A^*(c) = -c$. □

NB. Man hätte auch denken können, daß f_A^* die Multiplikation mit $\det(A)$ ist.

Brouwer'scher Fixpunkt satz $n \geq 1$

Jede stetige Abbildung $f: \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$ hat
einen Fixpunkt.

↑ abgebrochenem Scheibe

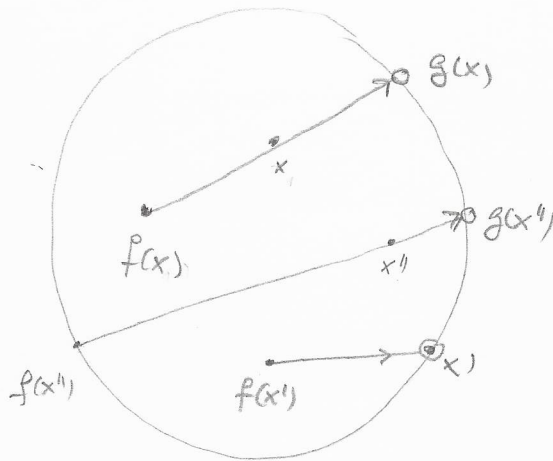


Beweis: Angenommen, $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathbb{D}^n$.

Dann konstruieren wir eine stetige Abbildung

$$g: \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{D}^n$$

wie folgt:



Ansatz

$$g(x) = x + t u, \quad u = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}, \quad t \geq 0$$

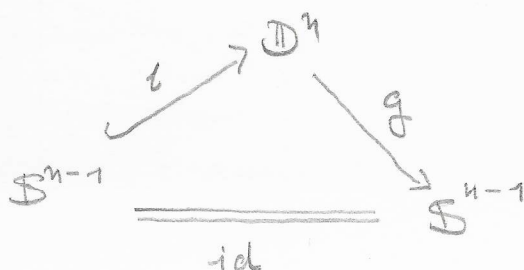
Bedingung: $\langle x + t u, x + t u \rangle = 1$

$$\implies t = -\langle x, u \rangle + \sqrt{1 - \|x\|^2 + \langle x, u \rangle^2}$$

• g stetig (glatt für glattes f)

• $g(x) = x$ für $x \in \partial \mathbb{S}^{n-1}$: $g \circ i = \text{id}$

(1)



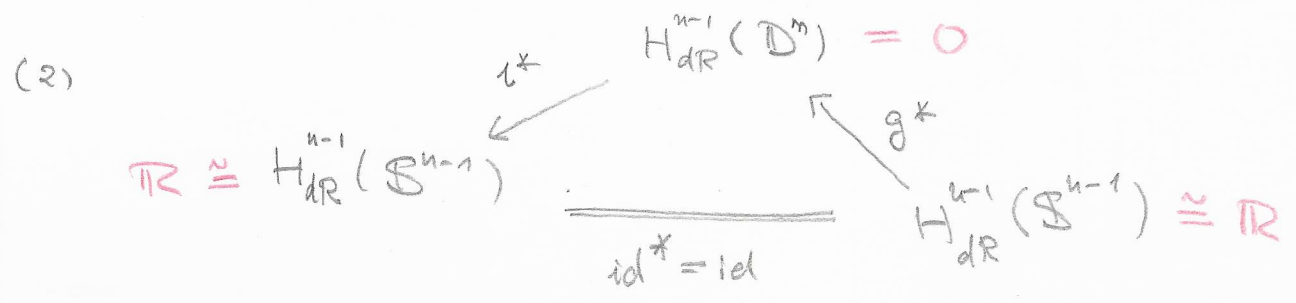
Behauptung:

Ein solches g kann es nicht geben.

(S^{n-1} ist nicht Retrakt von D^n .)

Falls g glatt ist, können wir das wie folgt beweisen:

Das kommutative Diagramm (1) würde uns das kommutative Diagramm (2) liefern:



Die Komposition $\iota^* \circ g^* = \text{id}$

Die linke Seite muss aber die Nullabbildung sein, weil sie über $H_{dR}^{n-1}(D^n) = 0$ läuft.

Nun wollen wir den Fixpunktsatz für alle stetigen f haben, müsse also an dieser Stelle etwas anderes vorgehen.

Wir betrachten $r : M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, r(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

1) $r \cong \text{id}$ $r_t(x) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}$

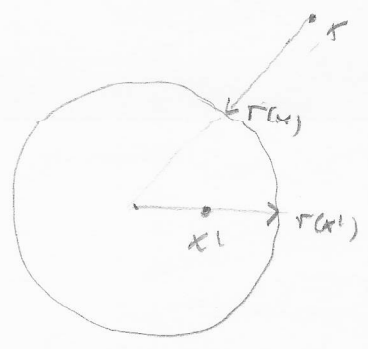
2) $r_t : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$r_t(x) = g(t r(x)), 0 \leq t \leq 1$

$r_0(x) = g(0) \equiv \text{konstant}$

$r_1(x) = g(r(x)) = r(x)$

3) konstant $= r_0 \cong r_1 = r \cong \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$

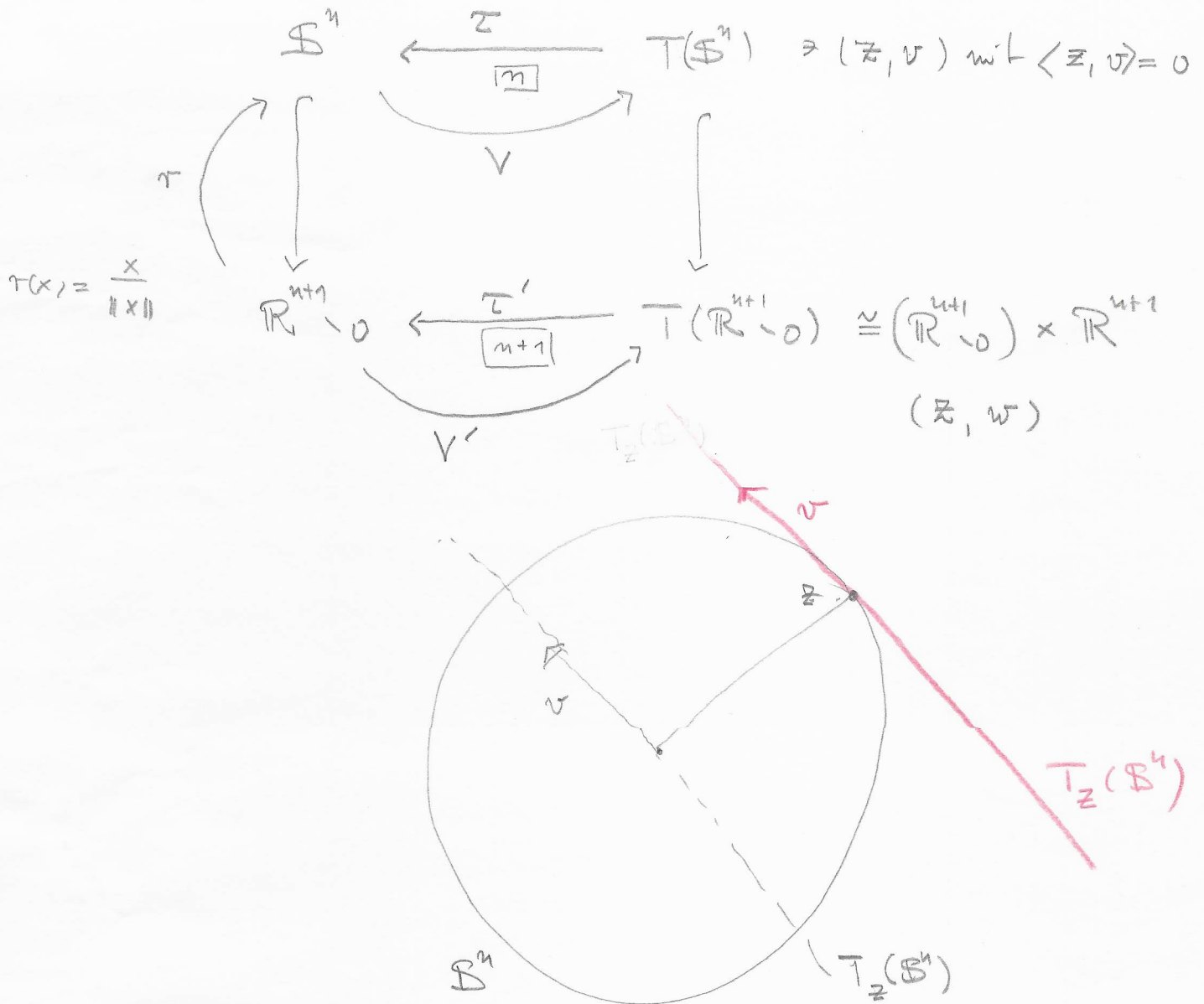


$\Rightarrow 4) \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong *$
zus. Zählbar.

Satz vom Igel

S^n hat ein nirgendsverschwindendes Vektorfeld dann und nur dann, wenn n ungerade ist.

Beweis: \Leftarrow Wir betrachten S^n als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+1} und betrachten das Vektorfeld V auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ fort durch $V(x) = V\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$.



Mit Hilfe der Einbettung $T(\mathbb{S}^n) \subseteq T(\mathbb{R}^{n+1}_0) = \overbrace{(\mathbb{R}^{n+1}_0)}^{12} \times \mathbb{R}^{n+1}$

können wir V (und V') als Funktionen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\quad} & (z, V(z)) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \\ \uparrow \text{r} & & \uparrow \quad \parallel \\ \mathbb{R}^{n+1}_0 & \xrightarrow{\quad} & (y, V(\pi(y))) \in (\mathbb{R}^{n+1}_0) \times \mathbb{R}^{n+1} \end{array}$$

auffassen und betrachte in Wahrheit nur die 2. Komponente in $\mathbb{R}^{n+1} \cong T_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^{n+1}_0)$.

Es gilt: 1) $V'(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^{n+1}_0$,

2) $\langle V'(y), y \rangle = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^{n+1}_0$.

Damit definieren wir die Homotopie auf \mathbb{R}^{n+1}_0 :

$$F(y, t) := \cos(\pi t)y + \sin(\pi t)V'(y)$$

Bewegung längs des Großkreises (auf $\|y\| \mathbb{S}^{n-1}$)
von $y = F_0(y)$ über $V'(y) = F_{\frac{1}{2}}(y)$
nach $-y = F_1(y)$.

• $F_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}_0}$, $F_{\frac{1}{2}} = V'$, $F_1 = -\text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}_0}$.

• $F_0^* = \text{id}$, $F_1^* = (-1)^{n+1}$

nach Korollar oben.

Daraus folgt $F_0^* = F_1^* : H_{\text{dr}}^n(\mathbb{R}^{n+1}_0) \longrightarrow H_{\text{dr}}^n(\mathbb{R}^{n+1}_0)$

ist nur möglich für $\mathbb{R} \quad \parallel \quad \mathbb{R}$

unwiders m.

Für die umgekehrte Richtung " \Leftarrow " betrachten wir für $n = 2m-1$ die $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{C}^m$ und definieren
 weiterhand

$$V\left(\underbrace{(x_1, x_2)}_{z_1}, \underbrace{(x_3, x_4)}_{z_2}, \dots, \underbrace{(x_{2m-1}, x_{2m})}_{z_m}\right)$$

$$= \left(\frac{x_2 - x_1}{iz_1}, \frac{x_4 - x_3}{iz_2}, \dots, \frac{x_{2m} - x_{2m-1}}{iz_m}\right)$$

Es gilt

- 1) $V(x) \neq 0$
- 2) $\langle V(x), x \rangle = 0$

} für alle $x \in \mathbb{S}^n$.

Bemerkung: Es ist eine ziemlich schwierige Frage, wie viele linear unabhängige Vektorfelder es auf \mathbb{S}^n gibt. 1962 hat J.F. Adams dies mithilfe der K-Theorie gelöst:
 Für $n = 2m-1$ setzen wir $2m = (2c+1)2^{4a+b}$, $0 \leq b \leq 3$,
 dann lautet die Antwort:
 Auf \mathbb{S}^n gibt es $2^b + 8a - 1$ linear-unabhängige Vektorfelder.

$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{G}(n)$	1	0	3	0	1	0	7	0	3

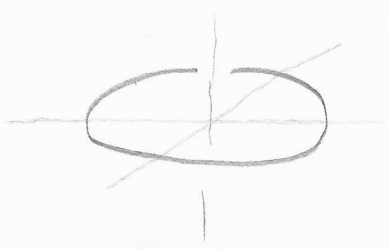
parallelisierbar!

↑
 Radon-
 Hurwitz-Zahl

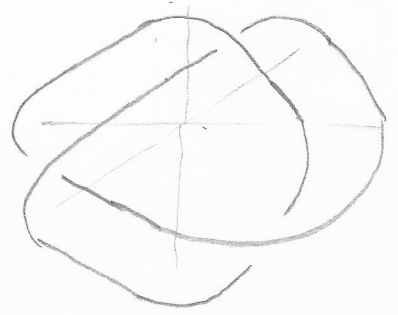
Über Komplemente in \mathbb{R}^n

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Teilungen
und sei $\varphi: A \rightarrow B$ ein Homöomorphismus
Es ist offenbar, daß $\mathbb{R}^n - A$ und $\mathbb{R}^n - B$ völlig
verschieden sein können; z.B. können A und B
zwei verschiedene Knoten in \mathbb{R}^3 sein.

\mathbb{R}^3



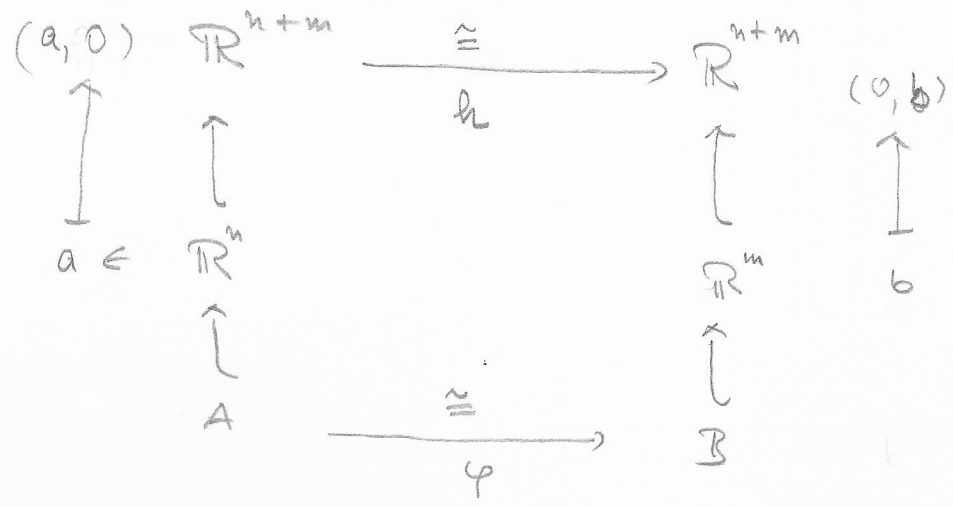
triviale Knoten



Kleeblattschlinge

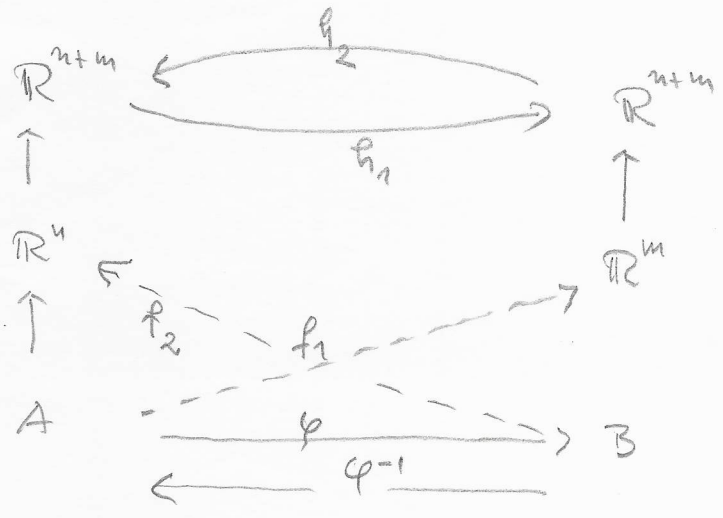
Die Komplemente $\mathbb{R}^3 - A$ und $\mathbb{R}^3 - B$ haben
verschiedene Fundamentalegruppen, aber überraschender-
weise isomorphe Homologie / Kohomologiegruppen.

Lemma Seien $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und $\varphi: A \rightarrow B$ ein Homöomorphismus. Dann gibt es einen Homöomorphismus



mit $h(a, 0) = (0, \varphi(a))$ für alle $a \in A$.

Beweis Mit Hilfe von Urysohn und Tietze finden wir Fortsetzungen f_1 und f_2 von φ bzw. φ^{-1} .



Wir setzen $h_1(x, y) = (x, y + f_2(x))$
 $h_2(x, y) = (x + f_2(y), y)$

- h_1 und h_2 sind Homöomorphismen,

$$h_1^{-1}(x, y) = (x, y - f_1(x)) \quad , \quad h_2^{-1}(x, y) = (x - f_2(y), y) .$$

- Wir setzen $h := h_2^{-1} \circ h_1$ und erhalten

$$h(a, 0) = h_2^{-1}(a, f_1(a)) = h_2^{-1}(a, \varphi(a))$$

$$= (a - f_2(\varphi(a)), \varphi(a)) = (0, \varphi(a)) .$$

□

Korollar Jeder Homöomorphismus $\varphi: A \rightarrow B$ zwischen zwei abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$ kann zu einem Homöomorphismus $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ fortgesetzt werden.

Beweis: Nimm h wie oben, und setze es mit $\tilde{T}(x, y) = (x, y)$ zusammen.

□

Damit haben wir ein Homöomorphismus

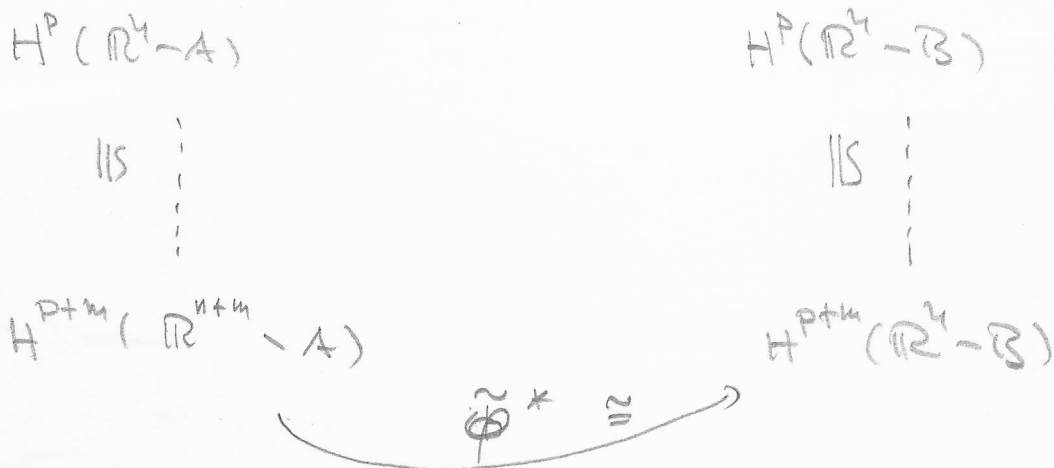
$$\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^{2n} \setminus A \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \setminus B .$$

Satz Sei $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varphi: A \rightarrow B$ ein Homöomorphismus.

Dann gilt $H_{dR}^p(\mathbb{R}^n - A) \cong H_{dR}^p(\mathbb{R}^n - B)$

für alle $p \geq 0$.

Beweis Mit dem "Aufdickungsatz" erhalten wir



Isomorphismen, und dann ist $\tilde{\varphi}^*$ ein Isomorphismus, und dann auch \square

Korollar Sind $A \cong B$ homöomorphe ^{abge.} Teile des \mathbb{R}^n , dann haben $\mathbb{R}^n - A$ und $\mathbb{R}^n - B$ gleichviele Komponenten.

Satz (Jordan-Brouwer'scher Separationssatz) $n \geq 2$

Ist $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^{n-1} , so hat $\mathbb{R}^n - \Sigma$ zwei Komponenten. Eine ist beschränkt, eine unbeschränkt; ihre Randpunkte sind jeweils Σ .

$\text{Pd}(U) = \bar{U} - \dot{U} \quad \square$