Der Satz von de Rham

Vortrag 4 im Seminar über de Rham-Kohomologie

Jonas Fromme

1 Einführung

Im Folgenden werden wir den Satz von de Rham beweisen, welcher die Gebiete der de Rham-Kohomologie und der singulären Kohomologie verbindet. Bevor wir uns dem Satz von de Rham zuwenden, beweisen wir Resultate aus der Homologischen Algebra, die für den Beweis des Satzes und das Ausrechnen konkreter Kohomologiegruppen nützlich sein werden.

2 Homologische Algebra

Definition 2.1. *Wir schreiben $A^\bullet$ für einen Kokettenkomplex abelscher Gruppen, also abelsche Gruppen A_p mit Randabbildungen $d\colon A^p \to A^{p+1}$, sodass $d^2 = 0$. Wir schreiben $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ für Kokettenabbildungen, also Abbildungen $f : A^p \to B^p$ für jedes p, sodass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "f"'] & A^p \arrow[r, "d_A"] \arrow[d, "f"'] & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r, "d_B"'] & B^p \arrow[r, "d_B"'] & B^{p+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.2. $\Omega^\bullet(-)$ ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der Kokettenkomplexe (mit Kokettenabbildungen als Morphismen). $H^p(-)$ ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der Kokettenkomplexe in die Kategorie der abelschen Gruppen für alle p.

Satz 2.3 (Lange exakte Kohomologiesequenz)**.** *Sei*

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen (d.h. f und g sind Kokettenabbildungen und in jeder Stufe ist die Sequenz kurz exakt). Dann ist für alle p der Homomorphismus (Verbindungshomomorphismus)

$$\partial^*\colon H^p(C^\bullet) \longrightarrow H^{p+1}(A^\bullet)$$

mit $\partial^*([c]) \coloneqq [f^{-1}(d_B(g^{-1}(c)))]$ wohldefiniert und es ergibt sich die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H^{p-1}(C^\bullet) \xrightarrow{\partial^*} H^p(A^\bullet) \xrightarrow{f^*} H^p(B^\bullet) \xrightarrow{g^*} H^p(C^\bullet) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots .$$

Beweis. Diagrammjagd. $\square$

Lemma 2.4. *Seien zwei kurze exakte Sequenzen von Kokettenkomplexen gegeben und sei (α, β, γ) ein Morphismus dieser kurzen Sequenzen, d.h. es kommutiert*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A'^\bullet \arrow[r, "f'"] & B'^\bullet \arrow[r, "g'"] & C'^\bullet \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Dann induzieren die Abbildungen auf Kohomologie einen Morphismus der zugehörigen langen exakten Sequenzen, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^{p-1}(C^\bullet) \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "\gamma^*"] & H^p(A^\bullet) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\alpha^*"] & H^p(B^\bullet) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\beta^*"] & H^p(C^\bullet) \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "\gamma^*"] & H^{p+1}(A^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^{p-1}(C'^\bullet) \arrow[r, "\partial^*"] & H^p(A'^\bullet) \arrow[r, "f'^*"] & H^p(B'^\bullet) \arrow[r, "g'^*"] & H^p(C'^\bullet) \arrow[r, "\partial^*"] & H^{p+1}(A'^\bullet) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Beweis. Es muss nur $\alpha^* \circ \partial^* = \partial^* \circ \gamma^*$gezeigt werden, der Rest folgt aus der Funktorialität von $H^p(-)$. Ersteres folgt daraus, dass, wenn $g(b) = c$ und $f(a) = d_B b$, dann $g'(\beta(b)) = \gamma(c)$ und $f'(\alpha(a)) = d'_B(\beta(b))$. $\square$

Korollar 2.5. *Für eine Menge $\{A_i^\bullet\}_{i\in I}$ von Kokettenkomplexen gilt*

$$H^p(\prod_{i\in I} A_i^\bullet) \cong \prod_{i\in I} H^p(A_i^\bullet)$$

für alle p. Hierbei ist $(\prod_{i\in I} A_i^\bullet)^p = \prod_{i\in I} A_i^p$ und $d = \prod_{i\in I} d_i$.

Beweis. $\ker d = \prod_{i\in I}(\ker d_i)$ und $\operatorname{Im} d = \prod_{i\in I}(\operatorname{Im} d_i)$, also auch $\frac{\ker d}{\operatorname{Im} d} = \prod_{i\in I} \frac{\ker d_i}{\operatorname{Im} d_i}$ $\square$

Wir können diese Ergebnisse nun auf die de Rham-Kohomologie anwenden.

Satz 2.6 (Mayer-Vietoris)**.** *Seien A, B offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit M mit den Inklusionen*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "j_A"] & \\ A \cap B \arrow[ur, "i_A"] \arrow[dr, "i_B"'] & & A \cup B \\ & B \arrow[ur, "j_B"'] & \end{tikzcd}$$

Dann ist

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(A\cup B) \xrightarrow{J=(j_A^\bullet, j_B^\bullet)} \Omega^\bullet(A) \oplus \Omega^\bullet(B) \xrightarrow{I=i_A^\bullet - i_B^\bullet} \Omega^\bullet(A\cap B) \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz und induziert die lange exakte Mayer–Vietoris-Sequenz in der de Rham-Kohomologie

$$\cdots \to H_{dR}^{p-1}(A\cap B) \xrightarrow{\partial^*} H_{dR}^p(A\cup B) \xrightarrow{J^*} H_{dR}^p(A) \oplus H_{dR}^p(B) \xrightarrow{I^*} H_{dR}^p(A\cap B) \xrightarrow{\partial^*} H_{dR}^{p+1}(A\cup B) \to \cdots$$

Beweis. Exaktheit lässt sich direkt überprüfen, außerdem haben wir $H^p(\Omega^\bullet(A)\oplus\Omega^\bullet(B)) \cong H^p(\Omega^\bullet(A)) \oplus H^p(\Omega^\bullet(B)) = H_{dR}^p(A) \oplus H_{dR}^p(B)$ genutzt, weil im endlichen Fall Produkt und Summe von Vektorräumen das Selbe sind. $\square$

Als Nächstes führen wir singuläre Homologie und Kohomologie ein.

3 Singuläre Homologie und Kohomologie

Definition 3.1. *Wir nennen*

$$\Delta_p := \{x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i \mid \sum \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

den Standard p-Simplex.

Definition 3.2. *Wir definieren $F_i : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$ als die lineare Abbildung mit*

$$F_i(e_k) = \begin{cases} e_k & k < i \\ e_{k+1} & k \geq i \end{cases} \tag{1}$$

Wir nennen F_i die i-te Seitenabbildung.

Definition 3.3. *Für eine Mannigfaltigkeit M nennen wir eine stetige Abbildung $\sigma \colon \Delta_p \to M$ einen singulären p-Simplex. $\Delta_p(M)$ bezeichnet nun die freie abelsche Gruppe erzeugt von allen singulären p-Simplizes.*

Definition 3.4. *Für einen singulären p-Simplex $\sigma \colon \Delta_p \to M$ definieren wir den Rand von σ als $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_i$ und setzen ∂ zu einem Homorphismus $\partial \colon \Delta_p(M) \to \Delta_{p-1}(M)$ fort.*

Wir haben nun $\partial^2 = 0$ und erhalten dadurch einen Kettenkomplex $\Delta_\bullet(M)$, dessen Homologiegruppen wir die singulären Homologiegruppen nennen. Wir sind nun aber an der singulären Kohomologie mit reellen Koeffizienten interessiert.

Definition 3.5. *Wir definieren $\Delta^p(M) = \mathrm{Hom}(\Delta_p(M), \mathbb{R})$ und $\delta = \mathrm{Hom}(\partial, \mathbb{R})$, also $\delta a(\alpha) = a(\partial\alpha)$ für $a \in \Delta^{p+1}(M)$, $\alpha \in \Delta_p(M)$. Wir haben $\delta^2 = 0$ und erhalten somit einen Kokettenkomplex $\Delta^\bullet(M)$ von Vektorräumen, dessen Kohomologiegruppen wir ab jetzt mit $H^p(M)$ bezeichnen. Die $H^p(M)$ heißen singuläre Kohomologiegruppen mit reellen Koeffizienten.*

Der Satz auf den wir hiermit hinarbeiten, ist der Satz von de Rham, welcher besagt, dass die de Rham-Kohomologiegruppen isomorph zu den singulären Kohomologiegruppen mit reellen Koeffizienten sind. Um einen Isomorphismus zu konstruieren müssen wir mit glatten singulären Simplizes arbeiten:

Definition 3.6. *Δ_p ist homöomorph zu D^p. Wir machen nun Δ_p zu einer Mannigfaltigkeit mit Rand, indem wir die differenzierbare Struktur von D_p mit einem Homöomorphismus auf Δ_p zurückziehen. Wir bezeichnen nun mit $\Delta_p^{sm}(M)$ die Untergruppe von $\Delta_p(M)$, welche von den glatten singulären p-Simplizes $\sigma \colon \Delta_p \to M$ erzeugt wird. Da die Seitenabbildungen F_i glatt sind, ist auch der Rand einer glatten Kette wieder glatt und wir erhalten einen Kettenkomplex $\Delta_\bullet^{sm}(M)$. Analog können wir $\Delta_{sm}^\bullet(M)$ durch Anwendung des* Hom*-Funktors definieren. Jede glatte Abbildung $f \colon M \to N$ induziert eine Kokettenabbildung $f^\bullet \colon \Delta_{sm}^\bullet(N) \to \Delta_{sm}^\bullet(M)$ durch $f^\bullet(a)(\sigma) = a(f \circ \sigma)$. Dadurch wird $\Delta_{sm}^\bullet(-)$ zu einem kontravarianten Funktor. Die Kohomologiegruppen des Kokettenkomplexes $\Delta_{sm}^\bullet$ nennen wir $H_{sm}^p(M)$.*

Das folgende Lemma berechtigt uns, uns auf glatte Simplizes einzuschränken:

Lemma 3.7. $H^p_{sm}(M) \cong H^p(M)$.

Beweis. Das folgt daraus, dass sich jede stetige Abbildung $\sigma\colon \Delta_p \to M$ durch glatte Abbildungen approximieren lässt und der Raum der stetigen Abbildungen von Δ_p nach M lokal zusammenziehbar ist. Somit ist jede stetige Abbildung von Δ_p nach M homotop zu einer glatten. Das kann man nutzen, um Kokettenabbildungen zwischen $\Delta^\bullet(M)$ und $\Delta^\bullet_{sm}(M)$ zu konstruieren, die Isomorphismen zwischen den Kohomologiegruppen induzieren. □

Satz 3.8 (Mayer-Vietoris)**.** *Seien $A, B \subset M$ offen. Analog zu der de Rham-Kohomologie gibt es auch in der singulären Kohomologie eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow {}^U\Delta^\bullet_{sm}(A \cup B) \xrightarrow{I=(i^\bullet_A, i^\bullet_B)} \Delta^\bullet_{sm}(A) \oplus \Delta^\bullet_{sm}(B) \xrightarrow{J=j^\bullet_A - j^\bullet_B} \Delta^\bullet_{sm}(A \cap B) \longrightarrow 0$$

und die dazugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\cdots \to H^{p-1}(A \cap B) \xrightarrow{\partial^*} H^p(A \cup B) \xrightarrow{I^*} H^p(A) \oplus H^p(B) \xrightarrow{J^*} H^p(A \cap B) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A \cup B) \to \cdots .$$

Hierbei ist ${}^U\Delta^p_{sm}(M) = \mathrm{Hom}({}^U\Delta^{sm}_p(M), \mathbb{R})$ und ${}^U\Delta^{sm}_p(M) \subset \Delta^{sm}_p(M)$ definiert als die Untergruppe erzeugt von den $\sigma\colon \Delta_p \to M$ glatt mit $\mathrm{Im}\,\sigma \subset A$ oder $\mathrm{Im}\,\sigma \subset B$.

Beweis. Die Exaktheit der Sequenz

$$0 \longrightarrow \Delta^{sm}_\bullet(A \cap B) \xrightarrow{I=(i_{A\bullet}, -i_{B\bullet})} \Delta^{sm}_\bullet(A) \oplus \Delta^{sm}_\bullet(B) \xrightarrow{J=j_{A\bullet}+j_{B\bullet}} {}^U\Delta^{sm}_\bullet(A \cup B) \longrightarrow 0$$

lässt sich direkt überprüfen. Für ein $f\colon M \to N$ ist hier $f_\bullet\colon \Delta^{sm}_\bullet(M) \to \Delta^{sm}_\bullet(N)$ definiert durch $f_\bullet(\sigma) = f \circ \sigma$ für singuläre p-Simplizes und linear fortgesetzt auf alle Ketten. Durch Anwendung des $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{R})$-Funktors geht die kurze exakte Sequenz auf Kettenebene in eine kurze exakte Sequenz auf Kokettenebene über, welche genau die Sequenz aus der Behauptung ist. Außerdem ist $H^p({}^U\Delta^{sm}_\bullet(M)) \cong H^p(\Delta^{sm}_\bullet(M))$ für alle p, wodurch sich die lange exakte Sequenz aus der Behauptung ergibt. □

4 de Rham-Homomorphismus

Wir definieren nun den de Rham-Homomorphismus, von dem wir später zeigen werden, dass er einen Isomorphismus auf den Kohomologiegruppen induziert.

Definition 4.1 (de Rham-Homomorphismus)**.** *Wir definieren $\Psi\colon \Omega^p(M) \to \Delta^p_{sm}(M)$ durch*

$$\Psi(\omega)(\sigma) = \int_{\Delta_p} \sigma^*\omega$$

für singuläre p-Simplizes $\sigma\colon \Delta_p \to M$ und setzen $\Psi(\omega)$ linear auf $\Delta^{sm}_p(M)$ fort. Ψ ist linear. Als Orientierung für Δ_p wählen wir eine beliebige Orientierung für Δ_0 und rekursiv eine Orientierung für Δ_{p+1}, die F_i genau dann orientierungserhaltend macht, wenn i gerade ist.

Lemma 4.2. *$\Psi\colon \Omega^\bullet(M) \to \Delta^\bullet_{sm}(M)$ ist eine Kokettenabbildung und natürliche Transformation der Funktoren $\Omega^\bullet(-)$ und $\Delta^\bullet_{sm}(-)$.*

Beweis. Die Kompatibiltät mit den Randabbildungen ergibt sich aus dem Satz von Stokes und der genutzten Orientierung für die Δ_p. Natürlichkeit folgt aus den Definitionen der Pullbacks für $\Omega^\bullet(-)$ und $\Delta^{sm}_\bullet(-)$. □

Für den Beweis nutzen wir den Satz von Stokes:

Satz 4.3 (Stokes)**.** *Sei M eine orientierte kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$. Dann gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

mit der auf ∂M induzierten Orientierung.

Beweis. Siehe Bredon, *Topology and Geometry*, Kapitel V, Satz 4.1. □

5 Satz von de Rham

Wir beweisen nun den Satz von de Rham:

Satz 5.1 (Satz von de Rham)**.** *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann ist $\Psi^* \colon H^p_{dR}(M) \to H^p(M)$ ein Isomorphismus für alle p.*

Für den Beweis starten wir erstmal mit sehr einfachen, nämlich zusammenziehbaren Mengen und nutzen dann die vorherigen Resultate, um den Satz für kompliziertere Mengen zu folgern.

Lemma 5.2. *Ist M zusammenziehbar, so ist $\Psi^* \colon H^p_{\mathrm{dR}}(M) \to H^p(M)$ ein Isomorphismus für alle p.*

Beweis. Aus dem Prinzip der Homotopieinvarianz, das sowohl für die de Rham- als auch die singuläre Kohomologie gilt, folgt schnell, dass für $p > 0$ sowohl $H^p_{dR}(M) = 0$ als auch $H^p(M) = 0$ gilt und für $p = 0$ sowohl $H^0_{dR}(M)$ als auch $H^0(M)$ isomorph zu $\mathbb{R}$ sind. Dabei stellen für $p = 0$ beide Kohomologiegruppen die lokal-konstanten, also in diesem Fall konstanten Funktionen dar und Ψ^* bildet zwei Darstellungen der selben konstanten Funktion aufeinander ab. Damit ist Ψ^* ein Isomorphismus für alle p. □

Lemma 5.3. *Seien $A, B \subset M$ offen. Ist A de Rham (d. h. $\Psi^* \colon H^p_{dR}(A) \to H^p(A)$ ist ein Isomorphismus für alle p) und B de Rham sowie $A \cap B$ de Rham, so ist auch $A \cup B$ de Rham.*

Beweis. Die Natürlichkeit von Ψ gibt uns einen Morphismus zwischen den kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^\bullet(A \cup B) \arrow[r, "J_\Omega"] \arrow[d, "\Psi"'] & \Omega^\bullet(A) \oplus \Omega^\bullet(B) \arrow[r, "I_\Omega"] \arrow[d, "\Psi_A \oplus \Psi_B"] & \Omega^\bullet(A \cap B) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Delta^\bullet_{sm}(A \cup B) \arrow[r, "J_\Delta"'] & \Delta^\bullet_{sm}(A) \oplus \Delta^\bullet_{sm}(B) \arrow[r, "I_\Delta"'] & \Delta^\bullet_{sm}(A \cap B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und folglich ist Ψ^* ein Morphismus zwischen den zugehörigen Mayer-Vietoris-Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{p-1}_{\mathrm{dR}}(A \cap B) \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "\Psi^*"'] & H^p_{\mathrm{dR}}(A \cup B) \arrow[r, "J^*_\Omega"] \arrow[d, "\Psi^*"'] & H^p_{\mathrm{dR}}(A) \oplus H^p_{\mathrm{dR}}(B) \arrow[r, "I^*_\Omega"] \arrow[d, "\Psi^*_A \oplus \Psi^*_B"] & H^p_{\mathrm{dR}}(A \cap B) \arrow[r, "\partial^*"] \arrow[d, "\Psi^*"] & H^{p+1}_{\mathrm{dR}}(A \cup B) \arrow[r] \arrow[d, "\Psi^*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{p-1}(A \cap B) \arrow[r, "\partial^*"'] & H^p(A \cup B) \arrow[r, "J^*_\Delta"'] & H^p(A) \oplus H^p(B) \arrow[r, "I^*_\Delta"'] & H^p(A \cap B) \arrow[r, "\partial^*"'] & H^{p+1}(A \cup B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung sind immer zwei von drei Spalten Isomorphismen und nach dem Fünfer-Lemma folgt, dass alle Spalten Isomorphismen sind. □

Lemma 5.4. *Seien $\{U_i\}_{i \in I}$ offene, paarweise disjunkte Teilmengen von M und U_i de Rham für alle i, dann ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ de Rham.*

Beweis. Die Funktoren $\Omega^\bullet(-)$ und $\Delta^\bullet_{sm}(-)$ bilden disjunkte Vereinigungen auf Produkte von Kokettenkomplexen ab. Die Kohomologiegruppen ergeben sich also auch wieder als Produkte von den einzelnen Kohomologiegruppen. Aus der Natürlichkeit folgt dann, dass $\Psi^* = \prod_{i \in I} \Psi_i^* \colon \prod_{i \in I} H^p_{dR}(U_i) \to \prod_{i \in I} H^p(U_i)$ als Produkt von Isomorphismen ein Isomorphismus ist. □

Aus dem folgenden Lemma folgt nun der Satz von de Rham:

Lemma 5.5. *Sei $P(U)$ eine Aussage über offene Teilmengen einer Mannigfaltigkeit M, die den folgenden Bedingungen genügt:*

(1) Wenn U diffeomorph zu einer offenen konvexen Menge in $\mathbb{R}^n$ ist, dann ist $P(U)$ wahr.

(2) Sind $P(A), P(B)$ und $P(A \cap B)$ wahr, dann ist auch $P(A \cup B)$ wahr.

(3) Ist $\{U_i\}$ eine Familie paarweise disjunkter offener Mengen und $P(U_i)$ wahr für alle i, dann ist $P(\bigcup_{i \in I} U_i)$ wahr.

Dann gilt: $P(M)$ ist wahr.

Beweis. Siehe Bredon, *Topology and Geometry*, Kapitel V, Lemma 9.5. □

Literatur

G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer, 1993.